

Índice

UNIDAD 1	Leyes de exponentes y radicales	3
UNIDAD 2	Grados y polinomios.....	6
UNIDAD 3	Productos Notables	11
UNIDAD 4	División de polinomios.....	14
UNIDAD 5	Cocientes Notables	19
UNIDAD 6	Factorización	23
UNIDAD 7	M.C.D. – M.C.M. – Fracciones	30
UNIDAD 8	Binomio de Newton	36
UNIDAD 9	Radicación.....	41
UNIDAD 10	Números Complejos.....	45
UNIDAD 11	Ecuaciones de primer grado	51
UNIDAD 12	Ecuaciones de segundo grado.....	59
UNIDAD 13	Desigualdades.....	64
UNIDAD 14	Funciones.....	69
UNIDAD 15	Progresiones	76
UNIDAD 16	Logaritmos	83

Leyes de exponentes y radicales

Definición 1

Si $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}$:

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a \text{ (n factores)}$$

Definición 2

Si $a \in \mathbb{R} - \{0\}$:

$$a^0 = 1$$

Definición 3

Si $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $n \in \mathbb{Z}^+$:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Definición 4

Si $m/n \in \mathbb{Q}$ con n positivo y $a \in \mathbb{R}$:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

Teoremas

$$1. \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$2. \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad ; a \neq 0$$

$$3. \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$4. \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$5. \quad (a^m)^n = a^{m \cdot n} = (a^n)^m$$

$$6. \quad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$7. \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$8. \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$9. \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

$$10. \quad \sqrt[n]{a \sqrt[m]{b}} = \sqrt[n]{a} \sqrt[nm]{b}$$

Ecuaciones exponenciales

I. BASES IGUALES

$$\text{Si: } N^x = N^y \rightarrow x = y$$

Obs.: $N \neq 0$ ^ $|N| \neq 1$

Ejemplo:

$$\text{Resolver: } 9^{x-1} = 27^{x-2}$$

Buscamos bases iguales:

$$3^{2x-2} = 3^{3x-6}$$

Luego:

$$2x - 2 = 3x - 6 \Rightarrow 4 = x$$

II. FORMAS ANÁLOGAS

$$\text{Si: } M^M = N^N \rightarrow M = N$$

Obs.: $M \neq \frac{1}{2}$ ^ $N \neq \frac{1}{4}$

Ejemplo:

$$\text{Resolver: } x^{5x^5} = 36^3$$

Buscando formas análogas:

$$(x^5)^{x^5} = (6^2)^3 \quad ; \quad (x^5)^{x^5} = 6^6$$

$$\text{Luego: } x^5 = 6 \rightarrow x = \sqrt[5]{6}$$

NOTA: Si: $a^{f(x)} = b^{f(x)} \rightarrow f(x) = 0$

Ejemplo:

$$\text{Resolver: } 3^{x-4} = 5^{x-4}$$

$$x - 4 = 0 \rightarrow x = 4$$

ÁLGEBRA

PROBLEMAS

01. Calcular:

$$S = \left(16^{-4^{-1}}\right)^{-1} + \left(25^{-2^{-1}}\right)^{-1}$$

- a) 8 b) 9 c) 10
d) 7 e) 6

02. Simplificar:

$$M = \frac{3^{n+4} - 3(3)^{n-1}}{3(3^{n+2})}$$

Indicar la suma de los términos de la fracción resultante.

- a) 107 b) 91 c) 89
d) 76 e) 81

03. Calcular:

$$E = \left[64^{\frac{1}{3}} - 32^{\frac{3}{5}}\right]^{\frac{1}{3}}$$

- a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) 4

04. Calcular:

$$F = \sqrt[3]{64^{2^{-1}} - 8^{3^{-1}} + 16^{2^{-2}}}$$

- a) 8 b) 9 c) 1
d) 3 e) 2

05. Efectuar:

$$M = \frac{\sqrt[3]{a^2 b} \cdot \sqrt{ab}}{\sqrt[6]{ab^5}}$$

- a) 1 b) a c) b
d) a/b e) ab

06. Efectuar:

$$Q = \frac{\sqrt[5]{9^3} \cdot \sqrt[15]{3} \cdot \sqrt[3]{9}}{\sqrt[6]{9} \cdot \sqrt[5]{27}}$$

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

07. Si: $b^a = 5$ y $a^b = 2$

Calcular el valor de:

$$R = a^{b^{a+1}} + b^{a^{b+1}}$$

- a) 57 b) 50 c) 58
d) 62 e) 64

08. Si: $a^a - 1 = a$, calcular el valor de:

$$E = a^a \sqrt{(a+1)^{(1+a)}}$$

- a) 1 b) a c) 2a
d) 1/a e) a^a

09. Efectuar:

$$K = \sqrt{a} \sqrt{a} \sqrt{a} \cdot \sqrt[8]{a} \cdot \sqrt{a^{-2}}$$

- a) 1 b) a c) a^2
d) 2a e) a^3

10. Calcular:

$$A = \frac{12^{10} \cdot 18^5 \cdot 16^{-1}}{8^5 \cdot 54^6}$$

- a) 8 b) 9 c) 10
d) 6 e) 7

11. Calcular:

$$R = a^2 \sqrt{\frac{9^{a^2+2} + 9^{a^2+1}}{90^{a^2+1}}}$$

- a) 1/10 b) 1/9 c) 10
d) 1 e) 2

12. Calcular:

$$S = \frac{a-b\sqrt{7^{2a}} + 21^{a-b}\sqrt{7^{2b}}}{a-b\sqrt{7^{a+b}}}$$

- a) 1 b) 10 c) 7
d) 14 e) 4

13. Calcular $(n+1)^4$ en:

$$\sqrt{\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{2^n}} = 4\sqrt{2}$$

- a) 0 b) 1 c) 2
d) 6 e) 8

14. Hallar el menor valor de "n"

$$\sqrt[3]{a^{n^2}} \cdot \sqrt[4]{a^{n-1}} = \sqrt[3]{a}$$

- a) 3 b) 1 c) 2
d) -3/4 e) -7/4

15. Resolver e indicar el valor de la expresión $2x+1$:

$$\sqrt[3]{\frac{3^9 - 3^x}{3^x - 3^3}} = 3$$

- a) 17 b) 21 c) 13
d) 15 e) 9

16. Resolver:

$$x^{-x^x} = 2^{\sqrt{2}}$$

- a) 1/2 b) 1/4 c) 2
d) 1/16 e) 2^{-8}

17. Hallar "n":

$$\frac{n^{3n-20} - n^n}{n^n - n} = n^{n-1}$$

- a) 20 b) 19 c) 21
d) 16 e) 18

18. Calcular x^{12} al resolver:

$$x^{x^6} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$$

- a) 0 b) 1 c) 2
d) 8 e) 4

19. Resolver:

$$4x^{x+1} + 4x^x = 5 \sqrt[4]{x}$$

- a) 1 b) 1/4 c) 1/2
d) 2 e) 4

20. Resolver:

$$x^{x^{(x^2+\sqrt{2})\sqrt{2}}} = 2^{2^{\sqrt{2}}}$$

Indicando el valor de:

$$(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$$

- a) 7 b) 1 c) 2
d) 6 e) 8

CLAVES

01d	02a	03c	04e	05b
06c	07a	08b	09a	10b
11a	12b	13a	14e	15c
16b	17b	18d	19b	20a

Grados y polinomios

Grado de expresiones algebraicas

Características de toda expresión algebraica de acuerdo al valor que tendrán los exponentes que afectan a la parte literal.

Los grados se clasifican en:

- Grado relativo a una variable:** es el mayor exponente de la variable mencionada.
- Grado absoluto de una expresión:** es la mayor suma de exponentes de las variables de cada término.

REGLA PARA HALLAR GRADOS

- PARA MONOMIOS.** Su grado relativo es el exponente de dicha variable y su grado absoluto es la suma de los exponentes de la parte literal.

Ejemplo:

$$M = 8^5 x^3 y^2$$

$$G.R.(x) = 3$$

$$G.R.(y) = 2$$

$$G.A.(M) = 5$$

- PARA POLINOMIOS.** Es el mayor exponente si se trata de un grado relativo y es el término de mayor grado si es el grado absoluto.

Ejemplo:

$$M = 7x^5y^2 - 2x^8y^6 + 8x^3y^9$$

$$G.R.(x) = 8$$

$$G.R.(y) = 9$$

$$G.A.(M) = 14$$

- PARA PRODUCTOS.** El grado absoluto o relativo, según sean el caso de cada factor se suman.

Ejemplo:

$$M(x,y) = (3x^7 - 2y^2 + 8x^2y)(xy^7 + 8x^2)$$

$$G.A.(M) = 7 + 8 = 15$$

$$G.R.(x) = 7 + 2 = 9$$

$$G.R.(y) = 2 + 7 = 9$$

- 4. PARA UNA FRACCIÓN.** Al grado respectivo del numerador, se le resta el grado respectivo del denominador.

Ejemplo:

$$M(x,y) = \frac{3x^7y^4 - 5x^8y^2 + 6x^5y^3}{xy(x^2 + y^3)}$$

$$G.A.(M) = 11 - (2+3) = 6 \quad G.R.(x) = 8 - (1+2) = 5 \quad G.R.(y) = 4 - (1+3) = 0$$

- 5. PARA UNA POTENCIA.** Al grado respectivo de la base se le multiplica por el exponente.

Ejemplo:

$$M = \left(x^2y^3 + \frac{x^2(x+y)}{x-y} + y^5 \right)^6$$

$$G.A.(M) = 5 \cdot 6 = 30 \quad G.R.(x) = 2 \cdot 6 = 12 \quad G.R.(y) = 5 \cdot 6 = 30$$

Polinomios importantes

- 1. POLINOMIO HOMOGÉNEO.** Es aquel en el cual todos sus términos son de igual grado absoluto.

Ejemplo:

$$P(x,y) = 3x^5y^2 + 6x^7 + 2x^3y^4$$

$P(x,y)$ es homogéneo de grado 7

- 2. POLINOMIO ORDENADO.** Un polinomio será ordenado con respecto a una variable. Si los exponentes de dicha variable están aumentando o disminuyendo a partir del primer término.

Ejemplo:

$$P(x) = x^8 + x^5 - 2x^4 + 5x + 2$$

- 3. POLINOMIO COMPLETO.** Un polinomio será completo con respecto a una variable, si dicha variable posee todos los exponentes desde el mayor hasta el exponente cero, inclusive.

Ejemplo:

$$P(x) = 2x^3 + 3x^2 + x^4 - 2x + 6x^0$$

- 4. POLINOMIOS IDENTICOS.** Dos polinomios son idénticos si tienen el mismo valor numérico para cualquier valor asignado a sus variables. En dos polinomios idénticos los coeficientes de sus términos semejantes son iguales.

Es decir, si: $ax^2 + bx + c \equiv mx^2 + nx + p$

Se cumple que: $a = m$; $b = n$; $c = p$

ÁLGEBRA

5. POLINOMIO IDENTICAMENTE NULO. Es aquel que se anula para cualquier valor de sus variables, es decir:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Se cumple:

$$a = 0 ; b = 0 ; c = 0$$

Notación Polinomial

Es la representación de un polinomio por medio de diferentes variables o estructura, cuando la variable adopta un valor constante se obtiene el valor numérico.

Ejemplo:

$$P(x) = x^3 + 5x^2 + 7$$

$$P(y) = y^3 + 5y^2 + 7$$

$$P(x-1) = (x-1)^3 + 5(x-1)^2 + 7$$

$$P(1) = (1)^3 + 5(1)^2 + 7 = 13 \text{ V.N.}$$

Ejemplo:

$$\text{Si } P(x) = 3x + 5$$

Hallar:

$$\begin{aligned} \text{a) } P[P(x)] & \quad P_{[P(x)]} = 3 P(x) + 5 = 3(3x + 5) + 5 \\ & \quad P_{[P(x)]} = 9x + 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } E = P(-2) + P(3) & \quad P(-2) = 3(-2) + 5 = -1 \\ & \quad P(3) = 3(3) + 5 = 14 \\ & \quad E = -1 + 14 = 13 \end{aligned}$$

PROBLEMAS

01. Sea el monomio:

$$M_{(x,y,z)} = 5x^{2n-4}y^{3n+1}z^{5n-8}$$

Hallar su grado absoluto, sabiendo que $GR(z)=12$

- a) 28 b) 29 c) 30
d) 27 e) 26

02. Hallar el valor de "n" para que el grado de:

$$\left[2x^{n+2}y \right]^3 \text{ es } 18$$

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 6 e) 8

03. Calcular el coeficiente de:

$$M_{(x,y)} = (a^2 + b^2)x^{5a-3b}y^{3+2b}$$

Sabiendo que $GA=16$ y $GR(y)=7$

- a) 10 b) 11 c) 12
d) 13 e) 4

04. Dado el monomio:

$$M_{(x,y)} = (a+b)x^{2a-2}y^{3b}$$

Hallar "ab", si se sabe que:

Coeficiente (M)= $GR(x)$ y $GA=27$

- a) 38 b) 39 c) 31
d) 35 e) 32

05. Se sabe que el grado absoluto del polinomio "F" es 11, hallar el valor de "n":

$$F_{(x,y)} = x^{3n-1}y^n - x^{2n-2}y^{2n} + x^{n-3}y^{3n}$$

- a) 1 b) 3 c) 5
d) 7 e) 9

06. En el siguiente polinomio:

$$P_{(x,y)} = 7x^{a+3}y^{b-2} + 5x^{a+2}y^{b-3}$$

Hallar "a+b" sabiendo que: $GA=12$

- a) 11 b) 12 c) 13
d) 14 e) 15

07. Si el polinomio $P(x)$ es completo, hallar "n":

$$P_{(x)} = x^{n+1} + 3x^{n+2} + x^{n+3} + 5$$

- a) 7 b) 0 c) 8
d) 2 e) 4

08. Hallar $(m+n+p)$, si se sabe que el polinomio:

$$P_{(x)} = x^{m-10} + 3x^{m-n+5} + 2x^{p-n+6}$$

Es completo y ordenado descendientemente.

- a) 12 b) 32 c) 38
d) 16 e) 28

09. Si el polinomio:

$$x^m y^n (4x^4 y^2 + 5x^3 y^3)$$

Es completo, hallar $(2m-3n)$

- a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) 4

10. Sabiendo que el polinomio es homogéneo. Calcular "mn":

$$x^{3m-2n}y^7 - 2x^8y^{10} + x^{2m}y^{m+n+1}$$

- a) 18 b) 19 c) 10
d) 16 e) 17

ÁLGEBRA

11. El grado del polinomio homogéneo es 10:

$$ax^3y^a z^2 + bx^b y^6 z - cxyz^c$$

Hallar la suma de sus coeficientes

- a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) 4

12. Dado el polinomio homogéneo:

$$P_{(x,y)} = x^3 y^5 - 3x^m y^n + 7y^{4p}$$

Se sabe que: $GR(x) = 6$. Hallar el valor de $(m+n+p)$

- a) 11 b) 10 c) 7
d) 14 e) 4

13. Calcular $(a^2 + b^2)$ Si:

$$a(x-2) + b(x+3) \equiv 2x + 21$$

- a) 30 b) 31 c) 32
d) 34 e) 38
14. Determinar " $m^2 - n^2$ " en la siguiente identidad de polinomios:

$$m(x-2005) + n(x-2003) \equiv x - 2007$$

- a) 3 b) 1 c) 2
d) 4 e) 7

15. Hallar " mn " si el polinomio es idénticamente nulo:

$$(m+n-18)xy^2 + 2x^2y + (n-m)x^2y \equiv 0$$

- a) 17 b) 21 c) 13
d) 15 e) 80

16. Si: $P_{(x+1)} = P_{(x)} + x$; $P_{(2)} = 5$

Calcular el valor de: $P_{(4)}$

- a) 12 b) 14 c) 20
d) 10 e) 12

17. Si $P_{(2x-3)} = x+5$; Calcular el valor de $P_{(4x+1)}$

- a) $2x+5$ b) $2x+7$ c) $3x$
d) $2x-1$ e) $2x+8$

18. Sabiendo que:

$$P_{(x)} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{2n}$$

Calcular: $S = P_{(1)} + P_{(-1)} - 2n$

- a) 0 b) 1 c) 2
d) 8 e) 4

19. Si: $P_{(x)} = ax+b$; $Q_{(x)} = bx+a$

Además. $P_{(3)}=3$ y $Q_{(1)}=1$

Calcular el valor de: $P(Q_{(2007)})$

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 5 e) 4

20. Sabiendo que:

$$P_{(x)} = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + x$$

Calcular el valor de:

$$E = \frac{P_{(x^2-1)}}{P_{(x)} \cdot P_{(x-1)}}$$

- a) 7 b) 1 c) 2
d) 6 e) 8

CLAVES

01b	02c	03d	04d	05b
06a	07b	08c	09a	10c
11a	12b	13d	14a	15e
16d	17b	18c	19a	20c

Productos Notables

1. CUADRADO DE UN BINOMIO

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

2. CUBO DE UN BINOMIO

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$$

3. CUADRADO DE UN TRINOMIO

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc)$$

4. CUBO DE UN TRINOMIO

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(a+c)(b+c)$$

5. MULTIPLICACIÓN DE 2 BINOMIOS CON TÉRMINOS COMUNES

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

6. MULTIPLICACIÓN DE UN BINOMIO SUMA POR SU DIFERENCIA

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

7. MULTIPLICACIONES DE UN BINOMIO POR TRINOMIO

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

8. IDENTIDADES DE LEGENDRE

$$(x + a)^2 + (x - a)^2 = 2(x^2 + a^2)$$

$$(x + a)^2 - (x - a)^2 = 4xa$$

9. IDENTIDAD DE ARGAN'D

$$(x^{2m} + x^m y^n + y^{2n})(x^{2m} - x^m y^n + y^{2n}) =$$

$$= x^{4m} + x^{2m} y^{2n} + y^{4n}$$

10. IDENTIDAD DE GAUSS

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \equiv$$

$$\equiv (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$$

11. IDENTIDAD CONDICIONAL

$$\text{Si: } a + b + c = 0$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + bc + ac)$$

ÁLGEBRA

PROBLEMAS

01. Si: $a+b=7$ y $ab=4$.

Calcular el valor de " $a^2 + b^2$ "

- a) 41 b) 29 c) 30
d) 27 e) 26

02. Si: $a-b=3$ y $ab=2$.

Indicar el valor de " $a^3 - b^3$ "

- a) 15 b) 45 c) 35
d) 16 e) 18

03. Si: $a-b=3$ y $ab=1$.

Calcular el valor de $(a+b)^2$

- a) 10 b) 11 c) 12
d) 13 e) 4

04. Si: $x^2+3x+1=0$

Determinar el valor de: $x^4 + x^{-4}$

- a) 38 b) 39 c) 31
d) 35 e) 47

05. Si: $x^2+1=\sqrt{6}x$

Hallar el valor de: $x^6 + x^{-6}$

- a) 14 b) 32 c) 52
d) 27 e) 59

06. Si: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2$

Calcular el valor de:

$$F = \frac{5a^2 + b^2}{6ab}$$

- a) ab b) 2 c) 3
d) 4 e) 1

07. Si: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{4}{x+y}$

Encontrar el valor de:

$$E = \frac{x^2 + y^3}{x^3 + y^2}$$

- a) 1 b) 3 c) 8
d) 2 e) 4

08. Si: $\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = 27$

Calcular el valor de:

$$M = \sqrt[4]{\frac{a}{b}} - \sqrt[4]{\frac{b}{a}}$$

- a) 1 b) 2 c) 8
d) 6 e) 5

09. Se sabe que: $\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{7}$

Indicar el valor de:

$$S = \frac{a^2 + b^2}{ab}$$

- a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) 5

10. Si: $a=b+1$

Reducir la expresión:

$$E = \sqrt[8]{(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)} + b^8$$

- a) 1 b) ab c) b
d) a e) $4ab$

11. Evaluar la expresión:

$$P = \sqrt[16]{1 + 80(9^2 + 1)(9^4 + 1)}$$

- a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) 4

12. Si: $a+b+c=10$

$$a^2+b^2+c^2=40$$

Calcular el valor de:

$$P=(a+b)^2+(a+c)^2+(b+c)^2$$

- a) 110 b) 100 c) 70
d) 14 e) 140

13. Si: $a, b, c \in \mathbb{R}$; además

$$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ac$$

Calcule el valor de:

$$M = \frac{a^3 + b^3}{c^3}$$

- a) 0 b) 1 c) 2
d) 4 e) 8

14. Sabiendo que: $a, b, c \in \mathbb{R}$; tal que:

$$(a+b+c)^2=3(ab+bc+ac)$$

Determine el valor de:

$$K = 7\sqrt{\frac{(a+b+c)^8}{a^8+b^8+c^8}}$$

- a) 3 b) 1 c) 2
d) 4 e) 7

15. Si: $a+b+c=0$

Calcular el valor de:

$$M = \frac{(a+b)^3 + (b+c)^3 + (a+c)^3}{abc}$$

- a) 1 b) 2 c) 3
d) -1 e) -3

16. Si: $a+b+c=0$

Calcular el valor de:

$$R = \frac{(2a+b+c)^2 + (a+2b+c)^2 + (a+b+2c)^2}{ab+bc+ac}$$

- a) -1 b) -4 c) -2
d) 1 e) 2

17. Si: $\sqrt{a+2b} + \sqrt{a-2b} = 4b$

Calcule el valor de:

$$\sqrt{a+2b} - \sqrt{a-2b}$$

- a) 2 b) 7 c) 3
d) 1 e) 8

18. Sabiendo que:

$$\sqrt{m^2+n^2} - \sqrt{m^2-n^2} = n^2$$

Calcular el valor de:

$$\sqrt{m^2+n^2} + \sqrt{m^2-n^2}$$

- a) 0 b) 1 c) 2
d) 8 e) 4

19. Si: $x^2+y^2+17=2x+8y$

Calcular el valor de: " xy "

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 5 e) 4

20. Sabiendo que: $x^2+y^2=2y-6x-10$

Indicar el valor de: x^4+y^4

- a) 72 b) 81 c) 24
d) 64 e) 82

CLAVES

01c	02b	03d	04e	05c
06e	07a	08e	09e	10d
11d	12e	13c	14a	15e
16c	17d	18c	19e	20e

División de polinomios

División Algebraica

Operación que se realiza entre polinomios que consiste en hallar dos polinomios llamados COCIENTE y RESIDUO, conociendo otros dos polinomios denominados DIVIDENDO y DIVISOR que se encuentra ligados por la relación:

$$D(x) = d(x) q(x) + r(x)$$

Donde: $D(x)$: Dividendo

$d(x)$: Divisor

$q(x)$: Cociente

$r(x)$: Residuo o Resto

PROPIEDADES DE LA DIVISIÓN

$$\text{Gdo. } (D(x)) \geq \text{Gdo. } (d(x))$$

$$\text{Gdo. } (q(x)) = \text{Gdo. } (D(x)) - \text{Gdo. } (d(x))$$

$$\text{Gdo. } (r(x)) < \text{Gdo. } (d(x))$$

Además:

$$\text{Máximo Gdo. } (r(x)) = \text{Gdo. } (d(x)) - 1$$

Principales metodos de división

METODO DE WILLIAM G. HORNER

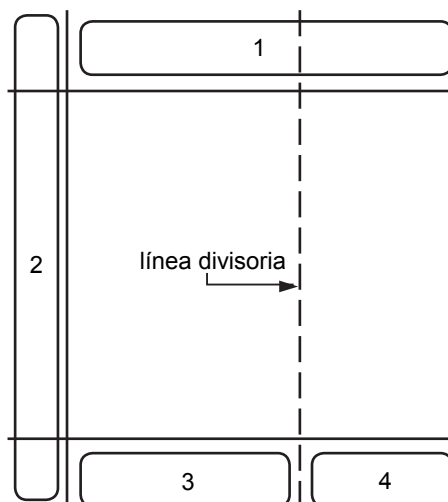
Pasos a seguir:

1. Coeficiente del dividendo ordenado decrecientemente en una variable, completo o completado.
2. Coeficientes del divisor ordenado decrecientemente en una variable, completo o completado, con signo contrario salvo el primero.
3. Coeficientes del cociente que se obtienen de dividir la suma de los elementos de cada columna entre el primer coeficiente del divisor. Cada coeficiente del cociente se multiplica por los demás coeficientes del divisor

para colocar dichos resultados a partir de la siguiente columna en forma horizontal.

4. Coeficientes del residuo que se obtienen de sumar las columnas finales una vez obtenidos todos los coeficientes del cociente.

ESQUEMA GENERAL



OBSERVACIÓN:

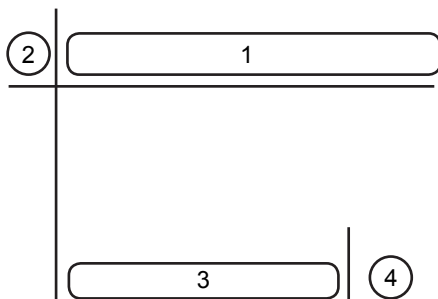
La línea divisoria se colocará separando tantos términos de la parte final del dividendo como grado del divisor.

Método de Paolo Ruffini

Se utiliza cuando el divisor es de primer grado.

Pasos a seguir:

1. Coeficientes del dividendo ordenado decrecientemente, completo o completado, con respecto a una variable.
2. Valor que se obtiene para la variable cuando el divisor se iguala a cero.
3. Coeficientes del cociente que se obtienen de sumar cada columna, luego que el coeficiente anterior se ha multiplicado por (2) y colocado en la siguiente columna.
4. Resto de la división que se obtiene de sumar la última columna.



OBSERVACIÓN:

Si el coeficiente principal del divisor es diferente de la unidad, el cociente obtenido se deberá dividir entre este valor.

Teorema del resto

Se utiliza para obtener el resto de una división. Consiste en igualar a cero al divisor y despejar la mayor potencia de la variable, para que sea reemplazada en el dividendo.

OBSERVACIÓN:

Después de realizar el reemplazo, debe comprobarse que el grado del polinomio obtenido sea menor que el grado del divisor.

Cocientes Notables

Concepto

Son aquellos cocientes que se pueden obtener en forma directa sin necesidad de efectuar la operación de división.

CONDICIONES QUE DEBEN CUMPLIR:

$$\frac{x^m \pm a^m}{x \pm a}$$

Donde: x ; a bases iguales
 $m \in \mathbb{Z}^+$; $m \geq 2$

CASOS

1. Si: $R = 0 \Rightarrow \frac{x^m \pm a^m}{x \pm a} = q(x) \Rightarrow$ cociente notable

2. Si: $R \neq 0 \Rightarrow \frac{x^m \pm a^m}{x \pm a} = q(x) + \frac{R(x)}{x \pm a} \Rightarrow$ cociente completo

También según la combinación de signos se puede analizar 3 casos, dando en cada caso un C.N.

Deducción de los C.N.

<i>División indicada según su forma</i>	<i>Cocientes Notables n pertenece a $\mathbb{Z}^+$</i>
$\frac{x^n - a^n}{x - a}$	$= x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \dots + a^{n-1} ; \forall n$
$\frac{x^n + a^n}{x + a}$	$= x^{n-1} - x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 - \dots + a^{n-1} ; \forall n \text{ (n: impar)}$
$\frac{x^n - a^n}{x + a}$	$= x^{n-1} - x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 - \dots - a^{n-1} ; \forall n \text{ (n: par)}$

ÁLGEBRA

CONDICIÓN NECESARIA Y SUFICIENTE PARA OBTENER UN C.N.

De: $\frac{x^m \pm a^n}{x^p \pm a^q}$ se debe cumplir: $\frac{m}{p} = \frac{n}{q} = r$; $r \in \mathbb{Z}^+$

Además: $r \rightarrow$ indica el número de términos de $q(x)$.

Fórmula del término general de un C.N.

Es una fórmula que nos permite encontrar un término cualquiera en el desarrollo de los C.N., sin necesidad de conocer los demás.

De la división:

$$\frac{x^n \pm a^n}{x \pm a}$$

un término de lugar k , (término cualquiera de $q(x)$); viene dado por la fórmula:

$$\xrightarrow{t_k} = \underbrace{\quad}_{\text{signo}} x^{n-k} a^{k-1}$$

Donde:

$x \rightarrow$ 1er. término del divisor.

$a \rightarrow$ 2do. término del divisor

$n \rightarrow$ número de términos de $q(x)$

Reglas para determinar el signo

a) Si $d(x) = x - a \rightarrow$ todos los términos del C.N. son (+)

b) Si $d(x) = x + a \rightarrow$ se tiene:

i) Términos del lugar impar son (+)

ii) Términos del lugar par son (-)

Además:

$$\xleftarrow{t_k} = \underbrace{\quad}_{\text{signo}} x^{k-1} a^{n-k}$$

$t_k \rightarrow$ término de lugar k contado del término final.

PROBLEMAS

1. Determinar el valor de "m" en el cociente notable exacto:

$$\frac{x^{5m-1} - y^{12m-5}}{x^{m-5} - y^{m-1}}$$

- A) 10 B) 6 C) 7
D) 8 E) 12

2. ¿Qué lugar ocupa en el desarrollo del cociente notable:

$$\frac{x^{160} - y^{280}}{x^4 - y^7}$$

el término en grado absoluto 252?

- A) 30 B) 31 C) 32
D) 33 E) 34

3. Si:

$$\frac{x^{3n+9} + y^{6n+11}}{x^{n-1} + y^{2n-3}}$$

Es un cociente notable. Hallar el valor de "n"

- A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

4. Si la expresión: $\frac{x^{m+3} - y^{2m+6}}{x^{m-3} - y^{m-1}}$

Es un cociente notable. Hallar el número de términos.

- A) 5 B) 3 C) 6
D) 4 E) 7

5. Sabiendo que: $n^2 - 31n + 234 = 0$; hallar el número de términos de la siguiente división exacta:

$$\frac{x^{n-1}y - y^n}{xy + y^2}$$

- A) 17 B) 12 C) 1
D) 14 E) 15

6. Hallar el valor numérico del término de lugar 29 del cociente notable

$$\frac{(x+3)^{36} - x^{36}}{2x + 3}$$

Para $x = -1$

- A) 128 B) 129 C) 4
D) 5 E) 6

7. El número de términos de:

$$\frac{x^a - y^b}{x^3 - y^5}$$

es ocho; ¿Cuál es el quinto término?

- A) $x^{20}y^9$ B) x^8y^{18} C) x^9y^{20}
D) $x^{18}y^8$ E) $x^{12}y^{20}$

8. El cociente de $\frac{x^m - y^n}{x^a + y^b}$ tiene 12 términos.

Si el cuarto término contiene un x de grado 16 y $a + b = 5$, hallar "n"

- A) 24 B) 36 C) 18
D) 42 E) 48

9. Calcular (n-m), si el décimo séptimo

término de: $\frac{x^m - y^n}{x^5 - y^7}$ es $x^{115}y^{112}$

- A) 42 B) 45 C) 46
D) 49 E) 80

10. Hallar el coeficiente del tercer término del desarrollo de:

$$\frac{x^{12} - 16}{2x^3 + 4}$$

- A) 2 B) 4 C) -2
D) 8 E) 4

ÁLGEBRA

11. Hallar el valor de $(m + n)$, si el t_{60} del desarrollo de:

$$\frac{x^{148m} - y^{296n}}{x^{2m} - y^{4n}}$$

es $x^{140}y^{1416}$, si el cociente es notable

- A) 7 B) 8 C) 9
D) 10 E) 11

12. Reducir aplicando cocientes notables, indicando el número de términos del cociente

$$\frac{x^{70} + x^{68} + x^{66} + \dots + x^2 + 1}{x^{32} + x^{28} + x^{24} + \dots + x^4 + 1}$$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

13. En el cociente notable:

$$\frac{x^{3m} - x^{-m}}{x^3 - x^{-1}}$$

El cuarto término de su desarrollo es independiente de x . Halle el valor de " m "

- A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

14. Hallar el valor numérico del cuarto término en el desarrollo del cociente notable, para $x = 1$

$$\frac{(2x+1)^6 - (x+1)^6}{x}$$

- A) 16 B) 256 C) 128
D) 64 E) 72

15. Hallar el término idéntico en el desarrollo de los cocientes notables:

$$\frac{x^{75} - y^{100}}{x^3 - y^4} \text{ y } \frac{x^{102} - y^{68}}{x^3 - y^2}$$

- A) $x^{45}y^{36}$ B) xy C) xy^4
D) $x^{36}y^{45}$ E) xy^2

16. Indicar cuántos términos tiene el siguiente desarrollo de:

$$\frac{x^{np} - y^p}{x^n - y}$$

Si los grados absolutos de todos los términos van disminuyendo de 3 en 3, y si además el t_{40} de su desarrollo tiene G.A. = 87

- A) 53 B) 54 C) 55
D) 56 E) 57

17. Calcular: $E = a + b + c$; si el término

central del desarrollo $\frac{x^a + y^b}{x^2 - y^5}$ es x^cy^{120}

- A) 390 B) 391 C) 392
D) 393 E) 394

18. Hallar el número de términos del siguiente cociente notable

$$\dots + x^{195}y^{140} - x^{190}y^{147} + \dots$$

- A) 7 B) 21 C) 30
D) 42 E) 60

CLAVES

1. D	2. D	3. C	4. D	5. B
6. A	7. C	8. B	9. C	10. A
11. E	12. D	13. D	14. E	15. A
16. D	17. B	18. E		

M.C.D. – M.C.M. – Fracciones

Máximo Común Divisor (M.C.D.)

El Máximo Común Divisor de 2 o más polinomios es otro polinomio que tiene la característica de estar contenido en cada uno de los polinomios. Se obtiene factorizando los polinomios y viene expresado por la multiplicación de los factores primos comunes afectados de sus menores exponentes.

Mínimo Común Múltiplo (M.C.M.)

El Mínimo Común Múltiplo de 2 o más polinomios es otro polinomio que tiene la característica de contener a cada uno de los polinomios. Se obtiene factorizando los polinomios y viene expresado por la multiplicación de los factores primos comunes y no comunes afectados de sus mayores exponentes.

Ejm. Hallar el M.C.M. y M.C.D. de los polinomios:

$$A(x) = (x+3)^4 (x^2+1)^6 (x-2)^2 (x+7)^6$$

$$B(x) = (x+7)^2 (x^2+1)^3 (x-2)^4 (x+5)^6$$

$$C(x) = (x+5)^4 (x^2+1)^2 (x-2)^3 (x+3)^3$$

Rpta.: Como ya están factorizados el:

$$\text{M.C.D. (A,B,C)} = (x^2+1)^2 (x-2)^2$$

$$\text{M.C.M. (A,B,C)} = (x^2+1)^6 (x-2)^4 (x+3)^4 (x+7)^6 (x+5)^6$$

PROPIEDAD

Sólo para 2 polinomios: $A(x)$, $B(x)$.

Se cumple:

$\text{M.C.D.}(A,B) \cdot \text{M.C.M.}(A,B) = A(x) \cdot B(x)$

Fracciones Algebraicas

I. FRACCIÓN ALGEBRAICA

Una fracción algebraica, se obtiene como la división indicada de dos polinomios $N(x)$ y $D(x)$ siendo $D(x)$ polinomios no constante.

$$\text{Denotado: } \frac{N(x)}{D(x)}$$

Donde:

$N(x)$: polinomio numerador (no nulo)

$D(x)$: polinomio denominador (no constante)

Ejm.:

$$\frac{x^2+1}{x-2} ; \frac{x^4+1}{x^7-2} ; \frac{x^2+2x+48}{x-4}$$

II. Signos de una fracción

- Signo del Numerador
- Signo del Denominador
- Signo de la Fracción propiamente dicha.

$$F = + \frac{+x}{+y}$$

Si intercambiamos un par de signos por un mismo signo el valor de la fracción no se altera en el ejemplo anterior, es decir:

$$F = + \frac{+x}{+y} = - \frac{-x}{+y} = + \frac{-x}{-y} = - \frac{+x}{-y}$$

También:

$$\frac{A}{-B} = - \frac{A}{B} = \frac{-A}{B}$$

Ejm: Sumar: $x \neq y$

$$S = \frac{x}{x-y} + \frac{y}{y-x} = \frac{x}{x-y} - \frac{y}{(x-y)}$$

$$S = \frac{x-y}{x-y} = 1$$

ÁLGEBRA

III. Regla para simplificar fracciones

Debemos factorizar el numerador y denominador para luego eliminar los factores comunes.

Ejm:

Simplificar:

$$F = \frac{(x^2 - 9)(x - 1)}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}$$

Solución:

Factorizando y Simplificando:

$$F = \frac{(x+3)(x-3)(x-1)}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{x+3}{x-2}$$

IV. Operaciones con fracciones

1. ADICIÓN O SUSTRACCIÓN

Es preciso dar el Mínimo Común Múltiplo (MCM) de los denominadores.

Se presentan los siguientes casos:

A) Para fracciones homogénea:

$$\text{Ejm.: } \frac{x}{x+2} - \frac{y}{x+2} + \frac{z}{x+2} = \frac{x-y+z}{x+2}$$

B) Para fracciones heterogéneas

$$\text{Ejm: } \frac{a}{b} + \frac{c}{d} - \frac{e}{f} = \frac{adf + bfc - bde}{bdf}$$

C) Para 2 fracciones.

$$\text{Regla practica: } \frac{x}{y} + \frac{z}{w} = \frac{xw + yz}{yw}$$

2. MULTIPLICACIÓN:

En este caso se multiplican numeradores entre si y los mismo se hace con los denominadores. Debe tenerse en cuenta que antes de efectuar la operación puede simplificarse cualquier numerador con cualquier denominador (siempre que sean iguales).

$$\text{Ejm: } \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} = \frac{a \cdot c \cdot e}{b \cdot d \cdot f}$$

$$\frac{x}{x+1} \cdot \frac{x+7}{x-2} \cdot \frac{x-2}{x} \cdot \frac{x+1}{x-7} = \frac{x+7}{x-7}$$

3. DIVISIÓN

En este caso, se invierte la segunda Fracción y luego se efectúa como una multiplicación. También se puede aplicar el producto de extremos entre el producto de medios.

Ejm: $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$... invirtiendo

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

V. Fracción independiente o Cte.:

$$F(x,y) = \frac{ax^2 + bxy + cy^2}{a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2}$$

Es independiente de x e y.

$$\Rightarrow \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = k \quad ; k \rightarrow \text{cte.}$$

ÁLGEBRA

PROBLEMAS

1. Hallar el M.C.D. de:

$$P(x) = x^3 - 1$$

$$Q(x) = x^4 + x^2 + 1$$

A) x^2+x+1 B) x^2+1 C) $x-1$

D) x^2-x+1 E) x^2-1

2. Hallar el número de factores primos en que se descompone el M.C.M. de los polinomios

$$P(x) = x^2 - 3x + 2$$

$$Q(x) = x^2 - 5x + 6$$

$$R(x) = x^2 - 4x + 3$$

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 5

3. El M.C.D. de:

$$x^4 + 2x^3 - px^2 + qx + r$$

$$x^3 + 7x^2 - qx + 20$$

es (x^2+3x+5) , hallar: pqr.

A) -340 B) 340 C) 680

D) -680 E) 170

4. Hallar el valor de E en la expresión:

$$E = \left(\frac{x-a}{x-b} \right)^3 - \frac{x-2a+b}{x+a-2b}$$

Para: $x = \frac{a+b}{2}$

A) 1 B) a+b C) a-b

D) $(a-b)^3$ E) 0

5. Simplificar:

$$M = \frac{ab(x+y)^2 + xy(a+b)^2 - 4abxy}{a(axy+bx^2+by^2) + b^2xy}$$

A) $ax+by$ B) $ax-by$ C) $\frac{ax+by}{ax-by}$

D) $\frac{ax-by}{ax+by}$ E) 1

6. Efectuar el siguiente producto:

$$E = \left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{x+1}\right) \left(1 + \frac{1}{x+2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{x+10}\right)$$

A) $\frac{x+10}{x}$ B) $\frac{x+1}{x}$ C) $\frac{x+1}{x}$

D) $\frac{1}{x}$ E) $\frac{2}{x}$

7. Reducir: $A = \frac{ab+b^2}{ab} + \frac{ab-b^2}{ab-a^2}$

A) a/b B) -b/a C) a/b

D) b/a E) 1

8. Efectuar:

$$R = \frac{a^3}{a+1} + \frac{a^2}{a-1} + \frac{1}{a+1} - \frac{1}{a-1}$$

A) a^2+2 B) $a-2$ C) a+1

D) a^2-2 E) a^2+1

9. Efectuar:

$$E = \frac{x^2-7x+12}{x^2-6x+8} \times \frac{x^2+3x-10}{x^2-10x+21} \div \frac{x+5}{x-7}$$

A) x B) x^{-1} C) 1

D) 2 E) 3

10. Si: $\frac{x+y}{x-y} + \frac{z-w}{z+w} = 10$

Calcular el valor de:

$$E = \frac{x}{x-y} + \frac{z}{z+w}$$

A) 5 B) 60 C) 5

D) 9 E) 6

11. Hallar el M.C.D. de los polinomios:

$$P(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$$

$$Q(x) = x^3 + 3x^2 + 2x$$

A) x-1 B) x+1 C) x^2+3x+2

D) x-5 E) x+5

12. Si los polinomios:

$$P(x) = 6x^4 + 4x^3 + 5x^2 + mx + n$$

$$R(x) = 2mx^3 + 2nx^2 + px - q$$

Admiten como M.C.D. a $2x^2 + 2x + 1$, hallar un divisor de $R(x)$.

- A) $x^2 + 2x - 1$ B) $x - 3$ C) $x^2 + x + 1$
D) $3x - 1$ E) $2x + 1$

13. Calcular: $(A+B)$ en la identidad:

$$\frac{5x-1}{2x^2+x-6} \equiv \frac{A}{x+2} + \frac{B}{2x-3}$$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

14. Simplificar:

$$f = \frac{(1+x^2)^4 + (1-x^4)^2}{(1+x^2+x^4)^2 - x^4}$$

- A) 2 B) 1 C) $1+x^2$
D) x^2 E) $\frac{1}{2}$

15. Si se cumple que:

$$y^2 = (1-x)(x+y)$$

Calcular: $\int \frac{x^2 + y^3}{x^3 + y^2}$

- A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

16. Hallar la suma de los términos del M.C.D. de los polinomios:

$$P(x,y) = x^3 - xy^2 + x^2y - y^3$$

$$Q(x,y) = x^3 - xy^2 - x^2y + y^3$$

$$R(x,y) = x^4 - 2x^2y^2 + y^4$$

- A) 0 B) 1 C) $2X$
D) 3 E) 4

17. Efectuar:

$$M = \frac{a^2}{xy} + \frac{(a+x)^2}{x^2 - xy} + \frac{(a+y)^2}{y^2 - xy}$$

- A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

18. El producto de dos polinomios es:

$(x^6 - 2x^3 + 1)$ y el cociente de su M.C.M. y su M.C.D. es $(x-1)^2$. Hallar el número de términos del M.C.D.

- A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

19. Hallar la suma de coeficientes del M.C.M. de:

$$P(x) = x^4 - 11x^2 - 18x - 8$$

$$Q(x) = x^4 - 1$$

$$R(x) = x^3 - 6x^2 + 32$$

- A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

20. Si la fracción:

$$\frac{ax^3 - (a+7)x^2 + (a+8)x - (a+1)}{ax^3 - (a+9)x^2 + (a+16)x - (a+7)}$$

Admite simplificación. ¿Cuál es el denominador que se obtiene si se efectúa dicha simplificación?

- A) $2x+1$ B) $2x-1$ C) $2x+3$
D) $2x-3$ E) $2x+5$

CLAVES

1 A	2 C	3 C	4 E	5 E
6 B	7 D	8 A	9 C	10 E
11 C	12 D	13 B	14 A	15 B
16 C	17 B	18 B	19 A	20 D

Binomio de Newton

DEFINICIÓN

Dado un número entero positivo "n", se define su factorial al producto de los factores consecutivos desde la unidad hasta dicho número propuesto.

NOTACIÓN

Existen dos notaciones: $n!$ y $\underline{n}$

Ejemplos:

$$1! = \underline{1} = 1$$

$$2! = \underline{2} = 1 \times 2 = 2$$

$$3! = \underline{3} = 1 \times 2 \times 3 = 6$$

$$4! = \underline{4} = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$$

En general:

$$n! = \underline{n} = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n \quad n \in \mathbb{N}$$

Coeficiente Binómico

CONCEPTO

Es un operador matemático que se utiliza para representar los coeficientes que se obtienen al desarrollar la potencia de un binomio.

NOTACIÓN

Un coeficiente binómico se representa $\binom{m}{n}$ que se lee: "coeficiente binómico m sobre n".

ELEMENTOS

- 1) Índice superior o base.-** es el número que se ha representado con "m" y que tiene valor arbitrario.
- 2) Índice inferior u orden.-** es el número entero y positivo, designado con "n", que indica el total de factores que hay en el desarrollo.

Desarrollo general del Coeficiente Binómico

$$\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n(n-1)(n-2)\dots 1}$$

Ejemplo:

$$\binom{12}{5} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 792$$

Propiedades del Coeficiente Binómico

1) Si el índice es cero, el coeficiente vale uno.

$$\binom{m}{0} = 1$$

2) Si el índice inferior es la unidad, el coeficiente es igual al índice superior.

$$\binom{m}{1} = m$$

3) Suma de coeficientes binómicos:

$$\binom{m}{n} + \binom{m}{n+1} = \binom{m+1}{n+1}$$

4) Las propiedades siguiente se cumplen cuando los elementos son números naturales, debiendo ser la base mayor o igual que el orden. Estos operadores también se les denomina números combinatorios y se les representa por:

$$C_n^m = \binom{m}{n}$$

$$a) C_n^m = \binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

$$b) C_n^m = C_{m-n}^m \text{ ó } \binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$$

$$c) C_n^m = \binom{m}{m} = 1$$

$$d) C_n^m = \binom{m}{n} = 0 \text{ ; si } m < n$$

Binomio de Newton

CONCEPTO

Se dá este nombre a la potencia indicada de un binomio.

Ejemplo:

$$(a+b)^5 \text{ ; } (a-b)^{-2} \text{ ; } (1+x)^{-1/3}$$

ÁLGEBRA

DESARROLLO DEL BINOMIO $(a+b)^n$

Regla práctica. - Un coeficiente cualquiera del desarrollo se obtiene multiplicando el coeficiente anterior al que deseamos calcular, por el exponente de "a" y luego dividiendo entre el exponente de "b" aumentado en la unidad.

Ejemplo:

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^{-2} = a^{-2} - 2a^{-3}b + 3a^{-4}b^2 - 4a^{-5}b^3 + \dots$$

Observación:

Si el exponente es entero negativo o fraccionario el desarrollo admite infinitud de términos.

TÉRMINO GENERAL DEL DESARROLLO DE $(a+b)^n$:

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

en donde: $(k+1)$ es la posición del término.

PROPIEDADES DEL DESARROLLO DE $(a+b)^n$, $n \in \mathbb{Z}^+$

1. El número de términos que resultan es: $n + 1$
2. Los signos de los términos se definen del esquema:

$$(a+b)^n : +, +, +, +, \dots, +$$

$$(a-b)^n : +, -, +, -, \dots, \pm$$

$$(-a-b)^n : \begin{cases} \text{Si } n \text{ par: } +, +, +, +, \dots, + \\ \text{Si } n \text{ impar: } -, -, -, \dots, - \end{cases}$$

3. La suma de los coeficientes del desarrollo de:

$$(\alpha a + b \beta)^n \text{ es } S = (\alpha + \beta)^n \text{ (en el particular } a = b = 1) \text{ resulta } S = 2^n)$$

4. La suma de los exponentes del desarrollo de: $(a^\alpha + b^\beta)^n$ es:

$$S_{\text{exp.}} = \frac{(\alpha + \beta) n(n+1)}{2}$$

5. La posición del término central o medio del desarrollo se calculará con las relaciones:

a) Si n par: $\frac{n+2}{2}$

b) Si n impar: $\frac{n+1}{2}$; $\frac{n+3}{2}$

PROBLEMAS

1. Hallar el valor de "n"

$$\frac{(2n+1)!(2n)!}{(2n+1)!(2n)!} = 99 \quad | (2n-2)$$

- a) 5 b) 6 c) 7 d) 4 e) 3

2. Hallar x en:

$$(2x-1)! = 120$$

- a) 5 b) 6 c) 7 d) 4 e) 3

3. Siendo:

$$\frac{10!}{a!b!} = 42$$

Calcular: ab

- a) 12 b) 15 c) 20 d) 30 e) 42

4. Calcular (n + m)

$$\text{Si: } \frac{\frac{8}{n}}{\frac{m}{m}} = 14$$

- a) 9 b) 12 c) 10 d) 13 e) 15

5. Dado el binomio:

$$(x^2 + y)^{19} \quad \text{Calcular:}$$

$$\frac{T_9}{T_{12}} = ?$$

- a) x^6y^{-3} b) x^2y^5 c) 20
d) 30 e) 42

6. Calcular el valor de "n" para que el décimo Término del desarrollo de:

$$\left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right)^n, \text{ contenga } x^{15}$$

- a) 12 b) 15 c) 20 d) 30 e) 42

7. Dado el binomio $(x + a)^4$.

Calcular: $T_2 \cdot T_4$

- a) $16x^4a^4$ b) $4x^4a^4$
c) $16x^3a^3$ d) $4x^3a^3$
e) $4xa$

8. En el desarrollo del binomio

$$(x^5 + x^3)^{10}$$

Calcular el séptimo término.

- a) $210x^{32}$ b) $210x^{34}$
c) $210x^{36}$ d) $210x^{38}$
e) $200x^{32}$

9. ¿Qué lugar ocupa el término cuya suma de exponentes de x e y sea 48 en el desarrollo del binomio.

$$(x^2 + y^3)^{18}$$

- a) 10 b) 11
c) 12 d) 13
e) 14

10. Dado el binomio $(\sqrt[4]{x} + x^{-1})^n$.

Hallar "n" para que el 5to término.

Resulte de 1er grado.

- a) 12 b) 16
c) 18 d) 20
e) 24

11. Calcular el quinto términos del desarrollo de:

$$\left(\frac{\sqrt{x}}{4} + \frac{4}{\sqrt{x}}\right)^8$$

- a) 59 b) 69
c) 70 d) 71

ÁLGEBRA

e) 19

12. Indicar el término independiente de "x" en el desarrollo de:

$$\left(\frac{0,5}{x^2} + \frac{x^2}{0,5} \right)^9$$

a) 72 b) 84
c) 96 d) 112

13. Indicar el valor de "m" en $(x^7 + y^m)^{25}$ si el término de lugar 14 es de la forma:

$$\alpha x^{84} y^{39}.$$

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5
5 e) 6

14. Dado el binomio $\left[\frac{1}{x^2} + \sqrt{x} \right]^n$ el

término de lugar 17 es de la forma

$$T_{17} = C_{16}^n x^2.$$

Calcular n.

a) 19 b) 20 c) 21
d) 22 e) 23

15. Si en el desarrollo del binomio $(3x^3 + 2x^{-1}y^2)^n$ existe un término cuyas potencias de "x" e "y" son respectivamente 5 y 8 encontrar el número de términos del desarrollo.

a) 7 b) 8 c) 9

d) 10 e) 11

16. ¿Qué lugar ocupa el Término que tiene como grado absoluto 17 ; en el desarrollo de:

$$(x^2 + 2y)^{14}$$

a) 7 b) 12 c) 13
d) 14 e) 6

17. Si los coeficientes de los Términos 3ro y 2do del desarrollo de $(a+b)^n$ Suman 78.

Calcular el número de términos del desarrollo.

a) 7 b) 8 c) 9
d) 13 e) 6

18. Hallar $(n+k_1)$ si $T_3 = 405X^{K1}$ al desarrollar :

$$(x^2 - 3)^n$$

a) 10 b) 11 c) 12
d) 13 e) 26

19. Halla el valor de "n"

$$1 + 2\underline{2} + 3\underline{3} + \dots + n\underline{n} = 5039$$

a) 7 b) 5 c) 6
d) 8 e) 10

CLAVES

1 A	2 E	3 D	4 A	5 A
6 C	7 A	8 D	9 D	10 E
11C	12 B	13 B	14 A	15 B
16B	17D	18 B	19 A	

Radicación

Recordar:

$$\begin{array}{ccc} & \sqrt[n]{A} = R & \\ \text{Índice} \rightarrow & & \leftarrow \text{Raíz} \\ & \downarrow & \\ & \text{Radicando} & \end{array}$$

TRANSFORMACION DE RADICALES DOBLES A SIMPLES

Regla Práctica:

$$\boxed{\sqrt{(a+b) \pm 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$$

Donde: ($a > b$)

Ejemplos:

Transformar:

$$\begin{array}{c} \sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{3} + \sqrt{2} \\ \uparrow \quad \uparrow \\ 3+2 \quad 3 \cdot 2 \end{array}$$

FÓRMULA GENERAL DE TRANSFORMACIÓN

$$\boxed{\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}}$$

Donde: $C = \sqrt{A^2 - B}$; $C \in \mathbb{Q}$

Ejemplo:

Transformar: $\sqrt{8 - \sqrt{60}}$

Solución: $A = 8$; $B = 60$

$$C = \sqrt{8^2 - 60} = 2$$

$$\text{Luego: } \sqrt{8 - \sqrt{60}} = \sqrt{\frac{8+2}{2}} - \sqrt{\frac{8-2}{2}}$$

$$\sqrt{8 - \sqrt{60}} = \sqrt{5} - \sqrt{3}$$

Racionalización

RACIONALIZACIÓN

Llamamos así a la transformación de una expresión irracional en otra que sea completamente racional haciendo uso para ello del factor racionalizante.

FACTOR RACIONALIZANTE (F.R.)

Llamamos así a aquella expresión irracional tal que al multiplicar a otra que también es irracional la convierte en una expresión racional.

CASOS:

	Expresión Irracional	Factor Racionalizante (FR)	Expresión Racional
1	$\sqrt[n]{A^k}$	$\sqrt[n]{A^{n-k}} ; n > k$	A
2	$(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})$	$(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})$	$a - b$
3	$(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})$	$(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})$	$a + b$
4	$\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$	$\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$	$a - b$

NOTA:

Por lo general en la mayoría de los ejercicios o problemas lo que se racionaliza son los denominadores, esto no necesariamente es así pudiendo racionalizarse también numeradores.

PROBLEMAS

1. Simplificar: $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{72} + \sqrt{50} - \sqrt{8}}$ se obtiene:

- a) 1/3 b) 1/9 c) 2/9
d) 4/9 e) 18/99

2. Simplificar:

$$\frac{3\sqrt{27} + 6\sqrt{12}}{\sqrt{108}}$$

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

3. Calcular:

$$\sqrt{79 + 30\sqrt{6}} - 3\sqrt{6}$$

- a) 4 b) 6 c) 7
d) 5 e) 3

4. Hallar:

$$\frac{\sqrt{28 + 16\sqrt{3}} + 2}{\sqrt{3}}$$

- a) $2 - \sqrt{12}$ b) $2 - 2\sqrt{3}$
c) $\sqrt{12}$ d) $2 + \sqrt{12}$
e) $2 + 4\sqrt{3}$

5. Hallar: "x"

$$\sqrt{16 - 2\sqrt{48}} = 2(x - 1)$$

- a) $\sqrt{2}$ b) 6 c) 7
d) 5 e) 3

6. Hallar "M":

$$M = \frac{\sqrt{61 + 24\sqrt{5}} - 2\sqrt{5}}{\sqrt{21 + 8\sqrt{5}}}$$

- a) -1 b) 1/2 c) 1/4
d) 1 e) 2

7. Hallar:

$$\frac{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{2}}{2}$$

- a) 1/2 b) 1/4 c) 1/3
d) 2 e) 1

8. Resolver:

$$\frac{2\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} - \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}{10}$$

- a) 2 b) 1 c) 1/3
d) 1/2 e) 1/4

9. Determinar "M":

$$M = \sqrt{3 + \sqrt{8}} + \sqrt{1 - 6\sqrt{2}}$$

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 5 e) 4

10. Determinar:

$$\sqrt{39 - 12\sqrt{3}} + \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$$

- a) 6 b) 5 c) 4
d) 7 e) 8

ÁLGEBRA

11. Hallar "n":

$$\sqrt{(2n+1)+4\sqrt{5}} = \sqrt{5} + \sqrt{n}$$

a) 3 b) 4 c) 2

d) 6 e) 8

12. La expresión: $\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}+a}$ es:

a) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ b) $\sqrt{a^2+b^2} + b$

c) $b - \sqrt{a^2 - b^2}$ d) $\sqrt{ab} + a$

e) $\sqrt{a^2+b^2} - a$

13. Racionalizar: $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

a) $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ b) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$

d) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{5}$ e) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{10}$

14.. Efectuar:

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2-\sqrt{3}} \div \frac{7+4\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

a) $2 + \sqrt{3}$ b) $\sqrt{6} + \sqrt{2}$ c) $\sqrt{6} - \sqrt{2}$

d) $2 - \sqrt{3}$ e) $\sqrt{3} - 1$

15. Racionalizar:

$$\frac{4}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1}$$

a) $\sqrt[3]{3} + 1$ b) $\sqrt[3]{6} + \sqrt{2}$ c) $\sqrt[3]{3} + 3$

d) $2\sqrt[3]{3} + 1$ e) $\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1$

16. Racionalizar:

$$\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}$$

a) $\sqrt{x^2-1} + 1$ b) $\sqrt{x^2+1} + x$

c) $\sqrt{x^2-1} + x$ d) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$

e) $\sqrt{x^2-1} - x$

17. Simplificar:

$$\frac{1}{\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}} - \sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}}$$

a) 2 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{4}$

d) $\frac{1}{3}$ e) 4

18.

$$\text{Si: } \sqrt{28-(n^2+1)\sqrt{3}} = 5 - \sqrt{n}$$

a) 6 b) 1 c) 3

d) 2 e) $2\sqrt{3}$

19. Hallar "E":

$$\sqrt{51+14\sqrt{2}} + \sqrt{29-10\sqrt{2}} = E^2 - E$$

a) 4 b) 3 c) 2

d) 5 e) 6

20. El valor de la suma del término

Racional se obtiene al efectuar:

$$\frac{16\sqrt[3]{4}-8\sqrt{2}}{\sqrt[3]{4}-\sqrt{2}}$$

a) 16 b) 12 c) 24

d) 2 e) 1

CLAVES

1b	2c	3d	4d	5a
6d	7a	8d	9e	10d
11b	12e	13a	14d	15a
16e	17b	18c	19a	20c

Números Complejos

UNIDAD IMAGINARIA

El número complejo $(0;1)$ es la unidad imaginaria; tiene la particular notación $i = (0;i)$.

TEOREMAS

$$i^2 = -1 \quad ; \quad i = (0;i)$$

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad (0;y) = yi$$

Según la notación de Gauss: $\sqrt{-1} = i$

POTENCIAS ENTERAS DE LA UNIDAD IMAGINARIA

Estudiaremos el comportamiento del número i^n ; $\forall n \in \mathbb{Z}$; teniendo en cuenta la siguiente definición:

$$i^0 = 1 \quad ; \quad i^1 = i$$

$$i^1 = i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = -i$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = i$$

$$i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1$$

$$i^7 = i^4 \cdot i^3 = -i$$

$$i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1$$

$\vdots$

PROPIEDADES

Se observa principalmente que:

$$i^4 = 1 \quad ; \quad i^8 = 1 \quad ; \quad i^{12} = 1 \quad ; \text{etc.}$$

Esto implica que la unidad imaginaria elevado a un múltiplo de cuatro es igual a la unidad.

En general:

$$i^{\pm 4} = 1$$

ÁLGEBRA

Luego deducimos que:

$$i^4+1=i \quad ; \quad i^4+2=-1 \quad ; \quad i^4+3=-i$$

Generalizando:

$$i^{4+k}=i^k \quad ; \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Números Complejos

DEFINICIÓN

Se llama número complejo a todo par ordenado (x,y) de componentes reales.

NOTACIÓN

$$Z = x + yi \quad \text{o} \quad Z = (x,y)$$

El conjunto cumple con todos los axiomas de $\mathbb{R}$ con excepción de la relación de orden.

Donde:

x : se le llama parte real de Z ($\text{Re}(Z)=x$)

y : se le llama parte imaginaria de Z ($\text{Im}(Z)=y$)

i : es la unidad imaginaria establecido por: $\sqrt{-1}=i \Rightarrow i^2=-1$

Z : es la variable compleja

$x+yi$: es el número complejo

$(x;y)$: es el número o par complejo

Tipos de números complejos

Luego de algunas definiciones necesarias tenemos los tipos de complejos:

1. COMPLEJO REAL O PURAMENTE REAL

Es aquel número complejo que carece de la parte imaginaria; es decir su parte imaginaria es cero.

Notación:

$$z = (x,0) = x \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

2. COMPLEJO IMAGINARIO PURO

Es aquel número complejo que carece de la parte real; es decir su parte real es cero; además su parte imaginaria siempre es diferente de cero.

Notación:

$$z = (0;y) = yi \quad ; \quad \forall y \in \mathbb{R} - \{0\}$$

3. COMPLEJO NULO

Es aquel número complejo que presenta la parte real e imaginaria igual al número cero; es decir las dos componentes son nulas.

Notación:

$$z = (0; 0)$$

DEFINICIONES

1. Dado el complejo $\bar{z} = (x, y) = x + yi$ se define el conjugado de z denotado por z^* ; tal que:

$$\bar{z} = (x; -y) = x - yi$$

2. Dado el complejo $z = (x; y) = x + yi$ se define el opuesto de z denotado por z^* ; tal que:

$$z^* = (-x; -y) = -x - yi$$

Ejemplo I

$$\text{Sea: } z = (4; -5) \Rightarrow \begin{cases} \bar{z} = (4; 5) \\ z^* = (-4; 5) \end{cases}$$

Álgebra de los números complejos

Se realizan mediante los axiomas del conjunto $\mathbb{R}$.

Ejemplo:

Adición:

$$(2+15i) + (3+8i) = (2+3) + (15+8)i = 5 + 23i$$

Sustracción:

$$(5+7i) - (9+2i) = (5-9) + (7-2)i = -4 + 5i$$

Multiplicación:

$$(4+3i)(2+11i) = 8 + 44i + 6i + 33i^2 = -25 + 50i$$

División:

$$\left(\frac{4+5i}{3+i} \right) = \frac{(4+5i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{12 - 4i + 15i - 5i^2}{9 - i^2} = \frac{17}{10} + \frac{11i}{10}$$

Raíz cuadrada:

$$\sqrt{x+yi} = \sqrt{\frac{p+x}{2}} \pm \sqrt{\frac{p-x}{2}} i$$

ÁLGEBRA

Elementos geométricos del Número Complejo

Si: $Z = x + yi$ es un complejo, se definen:

1º) Módulo de un número complejo:

$$\rho = |Z| = \sqrt{x^2 + y^2} ; x, y \in \mathbb{R} \quad |Z| \geq 0$$

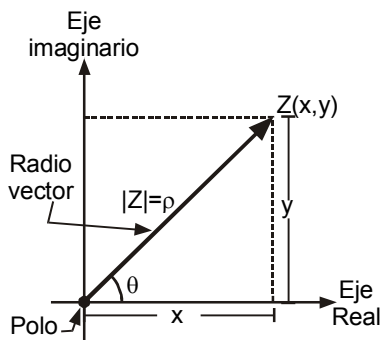
2º) Argumento de un número complejo:

$$\theta = \arctg\left(\frac{y}{x}\right) ; x \neq 0 \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

3º) Representación geométrica.

Todo número complejo se puede representar por puntos en el plano llamado Plano Complejo o Diagrama de Argand.

Sea: $Z = x + yi$; $x, y \in \mathbb{R}$



FORMA POLAR O TRIGONOMÉTRICA DE UN COMPLEJO

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho \text{Cis}\theta$$

FORMA EXPONENCIAL DE UN COMPLEJO

$$z = \rho e^{i\theta}$$

PROBLEMAS

01. Efectuar:

$$E = i^1 + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^{2009}$$

- a) 1 b) -1 c) i
d) -i e) 0

02. Halle: $\text{Re}(Z) + \text{Im}(Z)$, sabiendo que:

$$Z = (1+i)^2 + i^6 - i^{32}$$

- a) 2i b) 1 c) i
d) 3i e) 0

03. Calcular $G = (1+i)^{16} + (1-i)^{16}$

- a) 32 b) -i c) i
d) 16 e) 0

04. Calcular: $a + b$; si:

$$a + bi = (1+i)^4 + (1-i)^3$$

- a) 8 b) 16 c) 32
d) -8 e) 0

05. Calcular:

$$Z = \left(\frac{1+i^{13}}{1-i^{17}} + \frac{1-i^{21}}{1+i^{25}} \right)^{2008}$$

- a) 2i b) -2i c) i
d) -i e) 0

06. Calcular:

$$Z = \frac{1+i}{1 - \frac{1+i^{21}}{1 - \frac{1+i^{25}}{1-i^{29}}}}$$

- a) 1 b) -1 c) i
d) -i e) 0

07. Reducir:

$$E = \sqrt{2\sqrt{i} - \sqrt{2i}}$$

- a) 1+i b) 1-i c) i
d) -i e) 0

08. Simplificar:

$$R = i^{12^{3^4}} + i^{5^{6^7^8}} + i^{9^{10^{11^{12}}}} + \dots + i^{53^{54^{55^{56}}}}$$

- a) 12i b) 13i c) 14i
d) -i e) 0

09. Reducir:

$$M = \frac{2}{1+i} + \frac{5}{2-i}$$

- a) 1 b) -1 c) 2i
d) 3 e) 0

10. Simplificar:

$$S = \frac{5}{1+2i} + \frac{2}{1-i} + \frac{17}{4-i}$$

- a) 1 b) 6 c) i
d) 6i e) -i

ÁLGEBRA

11. Reducir:

$$M = \frac{4+i}{1-4i} + \frac{3+8i}{8-3i}$$

- a) 1 b) 2i c) i
d) -i e) 0

12. Hallar el módulo:

$$Z = \frac{2(2+i)}{2-i}$$

- a) 1 b) 2 c) $\sqrt{5}$
d) 0 e) 4

13. Indicar el módulo:

$$Z = \sqrt{\frac{(1+3i)(2+2i)}{(\sqrt{3}+\sqrt{7}i)(1-i)}}$$

- a) 1 b) -1 c) i
d) -i e) 0

14. Calcular: $|Z|$ en:

$$Z = \frac{(1+i)^{22}}{(1-i)^{20}} + \frac{(1+i)^{20}}{(1-i)^{16}} + i^{25}$$

- a) $\sqrt{2}$ b) 2 c) 3
d) 5 e) 1

15. Obtener: Z^{2007}

$$Z = \frac{1-i}{1+\frac{1-i}{1+\frac{1-i}{1+i}}}$$

- a) 1 b) -1 c) i
d) -i e) 0

16. Reducir:

$$K = (11+i)(i+1)^{-5}(i-1)^{-7} + \frac{15i-11}{64i}$$

- a) 1/4 b) 1 c) 4
d) -1/4 e) -1

17. Calcular "n" real si:

$$Z = \frac{4+(n+1)i}{2+5i}$$

Es un complejo real.

- a) 9 b) 8 c) 7
d) 6 e) 5

18. Hallar "b" para que el complejo:

$$Z = \frac{6+2i}{1+bi}$$

Sea imaginario puro.

- a) 1 b) -1 c) 2
d) -2 e) -3

19. calcular:

$$E = \sqrt{3+4i} + \sqrt{3-4i}$$

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

20. Si: $\sqrt[5]{x+yi} = \sqrt{7-24i}$; hallar el valor de:

$$M = 10\sqrt{\frac{(x+y)^2 + (y-x)^2}{2}}$$

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

CLAVES

01b	02c	03d	04d	05b
06a	07b	08c	09a	10c
11a	12b	13d	14a	15e
16d	17b	18c	19a	20c

Ecuaciones de primer grado

IGUALDAD

Es la relación que existe entre cantidades que tienen el mismo valor.

ECUACIÓN

Es una igualdad relativa que se verifica sólo para determinado(s) valor(es) de su incógnita.

Ejemplo:

La ecuación: $x - 7 = 3$

Se verifica sólo para: $x = 10$

SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN

Se llama así al valor de la incógnita que reemplazando en la ecuación verifica la igualdad. Si la ecuación tiene una sola incógnita a la solución también se le denomina raíz.

Ejemplo:

$x^2 = 9 \rightarrow$ soluciones o raíces: $x=3$ ó $x=-3$

Clasificación de las ecuaciones

I. ECUACIONES COMPATIBLES

Son aquellas que aceptan por lo menos una sola solución. A su vez se dividen en:

A. **ECUACIONES DETERMINADAS**

Son aquellas que tienen un número limitado de soluciones.

Ejemplo:

$x^2 - 1 = 24 \rightarrow$ tiene dos soluciones:

$$x = 5 \quad \text{ó} \quad x = -5$$

ÁLGEBRA

B. ECUACIONES INDETERMINADAS

Son aquellas que tienen un número ilimitado de soluciones.

Ejemplo:

$x + y = 7 \rightarrow$ tiene ∞ soluciones.

II. ECUACIONES INCOMPATIBLES

Son aquellas que no tienen solución, también se les denominan absurdas o imposibles.

Ejemplo:

$$x + 4 = x + 7 \rightarrow 4 = 7 \text{ (absurdo)}$$

No existe valor de "x" que verifique la igualdad.

OBSERVACIONES

1. Si se divide ambos miembros de una ecuación por una misma expresión que contenga a la incógnita, entonces se perderá soluciones. Esto se puede evitar si la expresión que se divide (simplifica) se iguala a cero.

Ejemplo:

Resolver: $(x+3)(x-2) = 4(x-2)$

Solución:

Simplificando: $(x-2) \rightarrow x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$ (para no perder soluciones)

Tendremos:

La ecuación tiene 2 soluciones $x = 2$ y $x = 1$ (de no haber igualado a cero, hubiéramos perdido la solución $x = 2$).

2. Si se multiplica ambos miembros de una ecuación por una misma expresión que contenga a la incógnita, entonces se puede producir soluciones extrañas. Esto se puede evitar si previamente se simplifica por separado cada miembro de la ecuación.

Ejemplo:

Resolver:

$$\frac{(x+3)(x-2)}{x-2} = 4$$

Primero simplificamos $(x-2)$, y tendremos: $x+3=4$; $x = 1$

OBSERVACIÓN

Si hubiésemos trasladado $(x-2)$ a multiplicar, tendríamos que una solución sería $x = 2$, que es una solución extraña, pues no verifica la igualdad.

3. Si se eleva ambos miembros de una ecuación a un mismo exponente, entonces se puede introducir soluciones extrañas.

Ejemplo:

Resolver:

$$\sqrt{x^2 + 7} = x - 7$$

Solución:

Elevando al cuadrado: $\left(\sqrt{x^2 + 7}\right)^2 = (x - 7)^2$

$$x^2 + 7 = x^2 - 14x + 49$$

$$14x = 42 \quad \rightarrow \quad x = 3$$

Pero si reemplazamos: $x = 3$ en la ecuación dada tendremos:

$$\begin{aligned} \sqrt{3^2 + 7} &= 3 - 7 \quad \rightarrow \quad \sqrt{16} = -4 \\ 4 &= -4 \quad (\text{no cumple}) \end{aligned}$$

Luego: $x = 3$ es una solución extraña, y la ecuación es incompatible, pues no tiene solución.

OBSERVACIÓN

Siempre que se potencie los 2 miembros de una ecuación, el valor o valores obtenidos para “x” deben comprobarse en la ecuación dada pues pueden no ser soluciones verdaderas.

Ecuaciones de primer grado o lineales (Con una sola incógnita)

La ecuación lineal con una incógnita:

$$ax + b = 0 \quad ; \quad a \neq 0$$

Tiene solución única:

$$x = -\frac{b}{a}$$

Por tanto, para resolver una ecuación de primer grado con una incógnita se transponen todos los términos que contienen a la incógnita a un miembro de la ecuación y todos los términos que no la contiene al otro miembro de la ecuación y se realizan las operaciones para el despeje de la incógnita.

ÁLGEBRA

Ejemplo:

Resolver la ecuación:

$$ax + b^2 = a^2 + bx \quad ; a \neq b$$

Solución

Por supuesto, aquí se sobre entiende que la incógnita es x , y que por tanto, todas las letras representan constantes conocidas. Entonces procederemos como sigue:

Por transposición: $ax - bx = a^2 - b^2$

Factorizando: $(a-b)x = a^2 - b^2$

Dividiendo entre $(a - b)$ si $a \neq b$; $x = a + b$

Comprobaremos nuestra solución por sustitución directa de la raíz $(a+b)$ en la ecuación original, así obtenemos:

$$a(a+b) + b^2 = a^2 + b(a+b)$$

O sea la identidad:

$$a^2 + ab + b^2 = a^2 + ab + b^2$$

DISCUSIÓN DE LA RAÍZ:

$$x = -\frac{b}{a} \quad ; \text{ de: } ax + b = 0$$

1. Si: $a = 0$; $b = 0 \rightarrow$ La ecuación es indeterminada.
2. Si: $a = 0$; $b \neq 0 \rightarrow$ La ecuación es incompatible.
3. Si: $a \neq 0$; $b \neq 0 \rightarrow$ La ecuación es determinada.

Sistema de ecuaciones lineales

UNA ECUACIÓN LINEAL CON DOS INCÓGNITAS (o variables) x e y , es de la forma $ax+by = c$; en donde a , b , c son constantes y a , b distintos de cero. Dos ecuaciones de este tipo:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

constituyen un sistema de ecuaciones lineales, en este caso de dos ecuaciones con dos incógnitas. Todo par de valores de x e y que satisfagan ambas ecuaciones, simultáneamente recibe el nombre de solución del sistema.

Por ejemplo, la solución del sistema: $x + y = 7$ y $x - y = 3$ es $x = 5$, $y = 2$.

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES CON DOS INCOGNITAS. A continuación, se exponen tres métodos para resolver un sistema de ecuaciones lineales.

A. METODO DE REDUCCIÓN

Cuando sea necesario, se pueden multiplicar las ecuaciones dadas por números, de manera que los coeficientes de una de las incógnitas en ambas ecuaciones sea el mismo. Si los signos de los términos de igual coeficiente son distintos, se suman las ecuaciones; en caso contrario, se restan. Consideremos:

$$\begin{array}{l} (1) \quad 2x - y = 4 \\ (2) \quad x + 2y = -3 \end{array}$$

Para eliminar y , se multiplica (1) por 2 y se suma con (2), obteniendo:

$$\begin{array}{rcl} 2 \times (1) & 4x - 2y & = 8 \\ (2) & x + 2y & = -3 \\ \hline \text{Suma } 5x & & = 5 \end{array} ; \text{ o sea } x = 1.$$

Sustituyendo $x = 1$ en (1), se obtiene: $2 - y = 4$, o sea $y = -2$.

Por tanto, la solución del sistema formado por (1) y (2) es $x = 1$; $y = -2$.

Comprobación:

Sustituyendo $x = 1$; $y = -2$ en (2) se obtiene $1 + 2(-2) = -3$; $-3 = -3$.

B. MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

Consiste en despejar una incógnita en una de las ecuaciones y sustituir su valor en la otra.

Por ejemplo, consideremos el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2) anteriores. De (1) se obtiene $y = 2x - 4$ y sustituyendo este valor en (2) resulta $x + 2(2x - 4) = 3$, de la que se deduce la solución $x = 1$. Sustituyendo $x = 1$ en (1), o en (2), se obtiene $y = -2$.

C. MÉTODO DE IGUALACIÓN

Consiste en de cada ecuación despejar la misma incógnita para luego igualar. Sea el sistema.

$$\begin{array}{l} 2x - y = 4 \quad \dots (1) \\ x + 2y = -3 \quad \dots (2) \end{array}$$

$$\text{De (1) despejamos } x: \quad x = \frac{y+4}{2} \quad \dots (\alpha)$$

$$\text{De (2) despejamos } x: \quad x = -3 - 2y \quad \dots (\beta)$$

ÁLGEBRA

Luego: $(\alpha) = (\beta)$: $\frac{y+4}{2} = -3 - 2y$

Resolviendo: $y + 4 = -6 - 4y$
 $5y = -10$
 $y = -2$

Reemplazando en α : $x = 1$

Clasificación de los sistemas de ecuaciones (DE ACUERDO A SU SOLUCIÓN)

A. SISTEMAS COMPATIBLES

Aquellos que tienen solución, se subdividen en:

A₁) Determinado: Número de soluciones limitado.

A₂) Indeterminados: Número de soluciones ilimitado.

B. SISTEMAS INCOMPATIBLES, IMPOSIBLES O ABSURDOS

Aquellos que no tienen solución.

Análisis del sistema particular

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

El sistema será:

A. *Compatible Determinado*

$$\frac{a_1}{a} \neq \frac{b_1}{b}$$

B. *Compatible Indeterminado*

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c}$$

C. *Incompatible o Absurdo*

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} \neq \frac{c_1}{c}$$

PROBLEMAS

01. Resolver:

$$\frac{3(x-1)}{4} - \frac{x}{4} = \frac{2}{7} + \frac{x-10}{14}$$

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 3/4 e) 0

02. Si la ecuación:

$$ax^2 + ax + 7 = 3x^2 - x + 5a$$

Es de 1er grado, el valor de "x" es:

- a) 3/2 b) 2 c) -1/2
d) 1 e) 1/2

03. Resolver:

$$\frac{x}{x-2} - \frac{2}{x-2} = \frac{2x+3}{x+5}$$

- a) 2 b) 3 c) 4
d) -2 e) Incompatible

04. Hallar "n" para que la ecuación sea incompatible:

$$2nx + 5 - n = 8x + 3n$$

- a) 4 b) -4 c) 5/4
d) 1 e) 0

05. Resolver:

$$\frac{x^2 - 6x + 10}{x^2 + 8x + 17} = \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 + 8x + 16}$$

- a) 2 b) 1 c) 1/2
d) -1/2 e) -1/4

06. Resolver la ecuación:

$$\frac{a}{b} \left(1 - \frac{a}{x} \right) + \frac{b}{a} \left(1 - \frac{b}{x} \right) = 1$$

- a) a+b b) ab c) a-b
d) 1 e) 0

07. Hallar el valor de "x":

$$2 + \frac{5}{x-2} = \frac{(x+1)^2 - 4}{x-2} - x - 2$$

- a) R b) Ø c) 1/3
d) R-{2} e) 3/2

08. Resolver la ecuación:

$$\sqrt{3x+10} - \sqrt{3x-2} = 6$$

- a) 2 b) 3 c) 10
d) 4 e) Ø

09. Resolver:

$$x - 5 + 2\sqrt{x-9} = 2 + \sqrt{4x-36}$$

- a) 7 b) 9 c) R
d) -7 e) incompatible

10. Resolver la ecuación:

$$mx^2 - (m^2 + 5m - 5)x + 5m - 9 = x^2$$

Si es de primer grado.

- a) 1 b) 3 c) -4
d) -4/3 e) -374

11. Resolver:

$$\frac{x-a-b}{c} + \frac{x-b-c}{a} + \frac{x-c-a}{b} = 3$$

- a) a+b+c b) a+b-c c) 1
d) a-b+c e) 0

ÁLGEBRA

12. Hallar "x":

$$\left[\frac{x+5}{x+7} \right]^2 = \frac{x^2 + 10x + 26}{x^2 + 14x + 50}$$

- a) 10 b) -8 c) -6
d) 7 e) 12

13. Hallar "x" en la siguiente ecuación:

$$(x+1) + (x+2) + (x+3) + \dots + (x+n) = n^2$$

Donde: $n \in \mathbb{Z} \wedge n \geq 2007$

- a) 1 b) 2007 c) n

d) $\frac{n+1}{2}$ e) $\frac{n-1}{2}$

14. Resolver para "x":

$$\frac{x+5}{x+6} + \frac{x+2}{x+3} = \frac{x+3}{x+4} + \frac{x+4}{x+5}$$

- a) -9/2 b) 2/9 c) 1/3
d) 5 e) 1

15. Resolver:

$$\begin{cases} \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{3} = -\frac{7}{6} \\ \frac{x-y}{2} + \frac{x+y}{3} = \frac{17}{6} \end{cases}$$

- a) (1;4) b) (1;-12) c) (3;4)
d) (1;5) e) (2;5)

16. Indicar "x+y" en:

$$\begin{cases} \sqrt{2}x - \sqrt{3}y = \sqrt{2} \\ 2\sqrt{3}x + 3\sqrt{2}y = 2\sqrt{3} \end{cases}$$

- a) 2 b) 1 c) 4
d) -1/4 e) -1

17. Que valor debe tener "n" para que el siguiente sistema sea incompatible:

$$\begin{cases} (3-n)x + 5y = 4 \\ (n-2)x + 2y = 6 \end{cases}$$

- a) 5/7 b) 8/7 c) 16/7
d) 6 e) 5

18. Calcular el valor de "m+n" si el siguiente sistema tiene infinitas soluciones:

$$\begin{cases} (m-3)x - (n-5)y = 10 \\ 4x - 3y = 5 \end{cases}$$

- a) 11 b) 22 c) 12
d) 0 e) 121

19. Hallar "x+y":

$$\begin{cases} 3\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 12 \\ 9x - 4y = 108 \end{cases}$$

- a) 10 b) 20 c) 30
d) 14 e) 25

20. Resolver:

$$\sqrt[3]{a + \sqrt{x}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{x}} = \sqrt[3]{5a}$$

- a) $\frac{4}{5}a^2$ b) 2a c) 3a²
d) 4 e) 1

CLAVES

01b	02c	03d	04d	05b
06a	07b	08c	09a	10c
11a	12b	13d	14a	15e
16d	17b	18c	19a	20c

Ecuaciones de segundo grado

Forma general:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

a, b y c : Coeficientes, $a \neq 0$

ax^2 : Término cuadrático

bx : Término lineal

c : Término independiente

Resolución de la Ecuación de Segundo Grado

I. POR FACTORIZACIÓN. Consiste en factorizar el 1er. término de la ecuación empleando aspa simple o completando cuadrados, enseguida, se iguala a cero cada uno de los factores obtenidos.

Ejemplo:

Resolver: $2x^2 - 5x - 3 = 0$

Solución: $2x^2 - 5x - 3 = 0$

$$\begin{array}{ccc} 2x & & +1 \\ & \nearrow & \searrow \\ 1x & & -3 \end{array}$$

$$(2x+1)(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

II. POR FÓRMULA. Las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ se obtiene mediante la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

las raíces x_1 y x_2 de la ecuación son:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ÁLGEBRA

O expresando de otro modo, la solución es:

$$\left\{ \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\}$$

Ejemplo:

Resolver: $x^2 + x + 3 = 0$

Solución:

$$a = 1 ; b = 1 ; c = 3$$

Reemplazando en la fórmula:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(1)(3)}}{2(1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{11}i}{2}$$
$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{11}i}{2} ; x_2 = \frac{-1 - \sqrt{11}i}{2}$$

Propiedades de las raíces

- 1. SUMA DE RAÍCES.** Se obtiene dividiendo el coeficiente del término lineal con el signo cambiado entre el coeficiente del término cuadrático.

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

- 2. PRODUCTO DE RAÍCES.** Se determina dividiendo el término independiente entre el coeficiente del término cuadrático.

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

- 3. DIFERENCIA DE RAÍCES.** Se calcula con la siguiente fórmula.

Donde: $\Delta = b^2 - 4ac$

$$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{a}$$

Naturaleza de las raíces

Para conocer la naturaleza de las raíces de la ecuación cuadrática se analiza el valor que toma la siguiente relación:

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad (\text{discriminante})$$

Se presentan los siguientes casos:

1. $\Delta > 0$; se tienen 2 raíces reales y diferentes.
2. $\Delta = 0$; se obtiene 2 raíces reales e iguales.
3. $\Delta < 0$; se obtienen 2 raíces complejas conjugadas.

OBSERVACIÓN:

$$\Delta \geq 0 \quad ; \text{ Raíces Reales}$$

Formación de la ecuación de segundo grado

Existen 2 procedimientos para formar una ecuación:

1. Se forma un producto de 2do. grado a partir de sus raíces de dos binomios cuyo primer término es la incógnita, siendo los segundos las raíces con signos cambiados, finalmente se iguala a cero dicho producto.
2. Consiste en calcular la suma "s" y el producto "P" de la raíces luego se reemplaza estos dos valores en la siguiente fórmula:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

ÁLGEBRA

PROBLEMAS

01. Resolver:

$$\frac{x+1}{x+2} - \frac{x+3}{x+4} = \frac{2}{3}$$

Y dar la diferencia entre el producto y la suma de las soluciones:

- a) 5 b) 15 c) 9
d) 6 e) 17

02. Resolver:

$$\sqrt{2x^2 - 9} = 2x + 3$$

- a) 3 b) -2 c) -4
d) -5 e) 1

03. Determinar el valor de "k" si una de las raíces de la ecuación es igual a 3:

$$x^2 - 7x + k = 0$$

- a) 9 b) 10 c) 11
d) 12 e) 13

04. Si a y b son las raíces de la ecuación:

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

Calcular:

$$E = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 6/5 e) 5/2

05. Hallar la menor raíz de la siguiente ecuación Mónica de segundo grado:

$$(m-2)x^2 - (3m-8)x + m = 9$$

- a) 2 b) -2 c) -4
d) -4 e) 3

06. La diferencia de las raíces de la ecuación:

$$x^2 - mx + 2 = 0 \text{ es } 1$$

Hallar: $m^2 - 5$

- a) 2 b) -2 c) -4
d) 11 e) 4

07. Hallar "k" para que las raíces de la ecuación :

$$x_2 + kx + 8 = k \text{ sean iguales (k>0)}$$

- a) -8 b) 4 c) -6
d) 10 e) 13

08. Para que valor de "a" la ecuación:

$$x^2 - (3a-1)x + 5a + 1 = 0, \text{ admite raíces iguales.}$$

- a) -1 b) -3 c) 9
d) 3 e) 0

09. Hallar "n" para que las raíces de la ecuación:

$$(n+1)x^2 - (2n-8)x + 2 = 2n$$

Sean simétricas

- a) 7 b) 9 c) R
d) -7 e) incompatible

10. Calcular el valor de "n", si las raíces de

$$\text{la ecuación: } (n-1)x^2 - 5x + 3n = 7$$

Son reciprocas.

- a) 2 b) -2 c) -4
d) 4 e) 3

11. Hallar "n", en la ecuación :

$$9x^2 - 18(n-1)x - 8n + 24 = 0$$

Si una raíz es el doble de la otra

- a) 2 b) -2 c) 0
d) 1 e) 3

12. Construir una ecuación cuadrática sabiendo que una de las raíces es:

$$x_1 = 3 + 2i$$

- a) $x^2 - 6x + 13 = 0$ b) $x^2 - 6x - 13 = 0$
c) $x^2 + 6x + 13 = 0$ d) $x^2 - 6x + 12 = 0$
e) $x^2 - 6x + 5 = 0$

13. Formar una ecuación de segundo grado sabiendo que una de las raíces es:

$$x_1 = 7 + \sqrt{2}$$

- a) $x^2 - 14x + 47 = 0$ b) $x^2 - 14x - 47 = 0$
c) $x^2 + 14x + 47 = 0$ d) $x^2 - 14x + 47 = 0$
e) $x^2 - 14x + 51 = 0$

14. Siendo x_1 y x_2 las raíces de la ecuación: $x^2 - x - 1 = 0$; Hallar el valor de:

$$M = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$$

- a) -9 b) 9 c) -3/2
d) 5 e) 1

15. Siendo x_1 y x_2 las raíces de la ecuación: $x^2 - 7x + 1 = 0$; Hallar el valor de:

$$M = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$$

- a) $\sqrt{5}$ b) 1 c) 2
d) 3 e) 4

16. Calcular el valor de "m" en la ecuación:

$$(m-1)x^2 + (3m+12)x - (3m+6) = 0$$

Si sus raíces son opuestas.

- a) 2 b) -2 c) 4
d) -4 e) 3

17. Resolver:

$$\frac{x^2(2x-3)}{2-x} = \frac{4(2x-3)}{2-x}$$

- a) 7 b) 8 c) 1/7
d) -3/2 e) 5

18. Dada la ecuación:

$$x^2 - 2mx - 3x = 5m - 1$$

¿Para que valor de "m" la suma de sus raíces sea igual al producto de las mismas?

- a) 11 b) -2/7 c) 2/7
d) 0 e) 2

19. Calcular Un valor de "m" en la ecuación:

$$x^2 - 2mx + 2m + 3 = 0$$

Si admite una raíz doble.

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

CLAVES

01b	02c	03d	04d	05b
06a	07b	08c	09a	10c
11a	12b	13d	14a	15e
16d	17b	18c	19a	20c

Desigualdades

DEFINICIONES

Una desigualdad expresa que una cantidad real, o una expresión, es mayor o menor que otra.

A continuación se indica el significado de los signos de desigualdad.

- 1) $a > b$ significa que "a es mayor que b" (o bien que $a - b$ es un número positivo).
- 2) $a < b$ significa que "a es menor que b" (o bien que $a - b$ es un número negativo).
- 3) $a \geq b$ significa que "a es mayor o igual que b".
- 4) $a \leq b$ significa que "a es menor o igual que b".
- 5) $0 < a < 2$ significa que "a es mayor que cero, pero menor que 2".
- 6) $-2 \leq x < 2$ significa que x "es mayor o igual que -2, pero menor que 2".

Una desigualdad absoluta es aquella que se verifica para todos los valores reales de las letras que intervienen en ella. Por ejemplo $(a-b)^2 > -1$ es cierta para todos los valores reales de a y b ya que el cuadrado de todo número real es un número positivo o cero.

Una desigualdad condicional es aquella que solo es cierta para determinados valores de las letras. Por ejemplo: $x - 5 > 3$ sólo es verdad para x mayor que 8.

Las desigualdades $a > b$ y $c > d$ son del mismo sentido. Las desigualdades $a > b$ y $x < y$ son de sentido contrario.

Teoremas de las Desigualdades

- 1) El sentido de una desigualdad no se modifica si se suma o se resta, un mismo número real a sus dos miembros. Por consiguiente, para pasar un término de un miembro a otro de una desigualdad, no hay más que cambiarle de signo.

Por ejemplo: si $a > b$ se tiene $a + c > b + c$ y $a - c > b - c$ y $a - b > 0$.

- 2) El sentido de una desigualdad no se altera si se multiplica, o divide, por un mismo número real sus dos miembros.

Por ejemplo: si $a > b$ y $k > 0$; se tiene: $ka > kb$ y $\frac{a}{k} > \frac{b}{k}$.

- 3) El sentido de una desigualdad se invierte cuando se multiplica o divide por un mismo número negativo sus dos miembros.

Por ejemplo: si $a > b$ y $k < 0$, se tiene $ka < kb$ y $\frac{a}{k} < \frac{b}{k}$.

- 4) Si: $a > b$ y a, b, n son positivos se tiene $a^n > b^n$. Pero $a^{-n} < b^{-n}$.

Ejemplos:

$5 > 4$; se tiene $5^3 > 4^3$ ó $125 > 64$, pero $5^{-3} < 4^{-3}$ ó $\frac{1}{125} < \frac{1}{64}$.

$16 > 9$; se tiene $16^{1/2} > 9^{1/2}$ ó $4 > 3$, pero $16^{-1/2} < 9^{-1/2}$ ó $1/4 < 1/3$.

- 5) Si: $a > b$ y $c > d$, se tiene $(a+c) > (b+d)$.

- 6) Si: $a > b > 0$ y $c > d > 0$, se tiene $ac > bd$.

También:

Desigualdades Estrictas

$>$: Mayor que

$<$: Menor que

Desigualdades No Estrictas

$\geq$: Mayor o Igual que

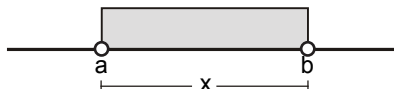
$\leq$: Menor o igual que

Intervalo Cerrado []: Cuando intervienen los extremos: $a < b$.



Luego: $a \leq x \leq b$

Intervalo Abierto]]: $< >$; cuando no intervienen los extremos.

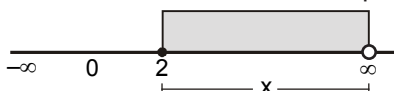


Luego: $a < x < b$

Observación:

El $+\infty$ y el $-\infty$ se escribirán como intervalos abiertos por no conocer su valor.

Ejemplo: $x \in [2; \infty)$



ÁLGEBRA

Inecuaciones de 1er. Grado

Son aquellos inecuaciones que presentan la siguiente forma:

$$ax + b > 0 \quad ; \quad (< ; \geq ; \leq)$$

Una inecuación de este tipo se resuelve agrupando los términos que contienen a la incógnita en un sólo miembro y los términos que no la contienen en el otro para luego realizar un despeje.

Inecuación de 2do. Grado (con una incógnita)

FORMA:

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad ; \quad (< ; \geq ; \leq)$$

MÉTODOS DE RESOLUCIÓN

1. POR FACTORIZACION (puntos. críticos)

a. Se factoriza el polinomio mediante un aspa simple.

a1. Se hallan los puntos críticos igualando cada factor a cero y se ubican en la recta numérica o eje lineal de coordenadas.

a2. De derecha izquierda se ubican los signos (+) y menos (-) en forma alternada en cada intervalo.

a3. Luego, si $P(x) \geq 0$ se tomarán los intervalos (+) positivos y si $P(x) \leq 0$ se tomarán los intervalos (-) negativos.

Ejemplo:

Resolver: $x^2 - x - 6 \leq 0$

1er. Paso: Factorizar:

$$\begin{array}{rcl} x^2 & - & x & - & 6 & \leq & 0 \\ x & & & & -3 & & \\ x & & & & 2 & \Rightarrow & (x-3)(x+2) \leq 0 \end{array}$$

2do. Paso: Ptos. críticos: $x - 3 = 0 \quad \wedge \quad x + 2 = 0$
 $\{3; -2\}$

3er. Paso: Ubicamos los puntos críticos en la recta numérica y hacemos la distribución de signos.



4to. Paso: Como $P(x) \leq 0$ tomamos el intervalo negativo.

$$x \in [-2; 3]$$

PROBLEMAS

01. Resolver:

$$\frac{3x-4}{2} + \frac{5x-6}{4} \geq \frac{8-7x}{2}$$

Señale un valor que la verifica

- a) 0 b) 1 c) 2
d) -1 e) -3

02. Resolver; siendo $a < b$:

$$a(x-b) - b(x-a) \leq a^2 - b^2$$

Señale el menor valor que puede tomar "x"

- a) a b) a+b c) 0
d) -a e) -b

03. Resolver la ecuación:

$$x - 8 + \left(\frac{12}{x-6} \right) \geq 4 - x + \left(\frac{12}{x-6} \right)$$

Indique la menor solución entera que asume "x"

- a) 4 b) 5 c) 6
d) 7 e) 8

04. Determinar el número de soluciones enteras que verifican la inecuación:

$$2 < \frac{3x+1}{2} < 4$$

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

05. Resolver:

$$x - 7 \leq 3x + 1 < x + 15$$

Indique la suma de las soluciones enteras

- a) 15 b) 11 c) 12
d) 5 e) 6

06. Determinar el menor valor entero de "x" si:

$$\frac{1}{7} \leq \frac{1}{2x+1} < \frac{1}{3}$$

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

07. Si $x \in [7;9]$, calcule el mayor valor de "x":

$$\frac{x+3}{x-2}$$

- a) 1 b) 0 c) 2
d) 12/7 e) 3

08. Resolver:

$$x^2 - x - 20 < 0$$

- a) $x \in \mathbb{R}$ b) $\langle -4;5 \rangle$ c) $\langle -5;4 \rangle$
d) $x \in \emptyset$ e) $\langle -4;\infty \rangle$

09. Resolver:

$$x^2 + x - 72 \geq 0$$

Indique el menor valor entero positivo que se verifica.

- a) 5 b) 6 c) 7
d) 8 e) 9

10. Resolver:

$$x^2 + 8x + 20 \leq 0$$

- a) $x \in \mathbb{R}$ b) $\langle -\infty;1 \rangle$ c) $\langle -1;1 \rangle$
d) $x \in \emptyset$ e) $\langle 4;\infty \rangle$

11. Resolver:

$$x^2 + 10x + 27 \geq 0$$

- a) $x \in \mathbb{R}$ b) $\langle -\infty;2 \rangle$ c) $\langle -2;2 \rangle$
d) $x \in \emptyset$ e) $\langle 2;\infty \rangle$

ÁLGEBRA

12. Resolver:

$$x^4 - x^2 - 12 < 0$$

Indique la suma de las soluciones enteras.

- a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) 4

13. Resolver:

$$\frac{1}{x^2 - 25} > 0$$

Indique la mayor solución entera negativa.

- a) -4 b) -5 c) -6
d) -7 e) -8

14. Resolver:

$$\frac{x}{x^2 - 16} \leq 0$$

Indique la mayor solución entera.

- a) 4 b) 5 c) 6
d) 0 e) 3

15. Si "x" R:

$$x^2 + bx + 4 > 0$$

El mayor valor natural de "b" es:

- a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) 4

16. Resolver:

$$x^4 - 8x^2 - 9 \geq 0$$

El menor valor positivo de "x" es:

- a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) 4

17. Indicar el menor valor natural que puede tomar "n" para que la inecuación:

$$x^2 - 5x + (n - 3) > 0$$

Se verifique para todo valor real de "x".

- a) 9 b) 10 c) 11
d) 12 e) 13

18. Hallar la suma de todos los valores enteros obtenidos al resolver:

$$8 \leq \sqrt[4]{16^{x+5}} < 64^3$$

- a) 71 b) 72 c) 73
d) 74 e) 75

19. Resolver:

$$|x^2 - 3| \leq 6$$

Dar como respuesta la suma de los valores enteros que se verifican.

- a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) 4

19. Calcular el menor valor de "n":

$$4x - x^2 - 10 \leq n ; \text{ Si } \forall x \in R$$

- a) -4 b) -5 c) -6
d) -7 e) -8

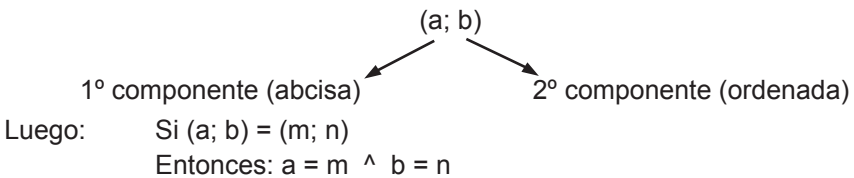
CLAVES

01c	02b	03d	04a	05b
06b	07c	08b	09d	10d
11a	12a	13a	14a	15d
16d	17b	18e	19a	20c

Funciones

PAR ORDENADO

Conjunto de dos elementos en donde el orden en que estén ubicados (los elementos), indica una característica de los mismos.



Producto cartesiano

Es un conjunto que genera pares ordenados.

Si A y B son conjuntos no vacíos:

$$A \times B = \{(a; b) / a \in A \wedge b \in B\}$$

Esta notación indica que en los pares ordenados generados las 1ras. componentes pertenecen al conjunto A y las 2das. componentes al conjunto B.

Ejemplo:

$$A = \{1; 2; 3\}$$

$$B = \{7; 8\}$$

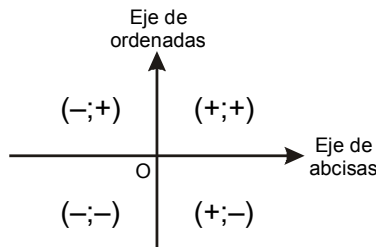
$$A \times B = \{(1; 7), (1; 8), (2; 7), (2; 8), (3; 7), (3; 8)\}$$

$$B \times A = \{(7; 1), (7; 2), (7; 3), (8; 1), (8; 2), (8; 3)\}$$

Luego: $A \times B \neq B \times A$

Plano Cartesiano

Es aquel donde se ubican los puntos generados por los pares ordenados.



Función

DEFINICIÓN

Dados dos conjuntos no vacíos A y B llamamos función definida en A con valores en B, o simplemente función de A en B a toda correspondencia f que asocia a cada elemento $x \in A$ un único elemento, $y \in B$.

Notación

$$f: A \rightarrow B \vee A \xrightarrow{f} B$$

Se lee f es función de A en B.

Ejemplo:

$F = \{(2;3), (4;7), (8;9), (5;0)\}$ Función

$G = \{(3;8), (5;1), (3;2), (7;-3)\}$ Relación
 No es función

$I = \{(1;6), (3;2), (4;5), (1;6)\}$ Función
 es la misma

NOTA:

Si $(a; b) \in F$ entonces $F(a) = b$

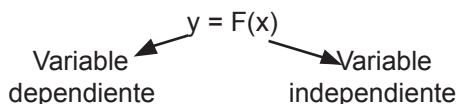
Es la imagen de "a" en F.

Ejemplo:

$F = \{(4;0), (6;-1), (8;2)\}$

$$F(4) = 0 \quad ; \quad F(6) = -1 \quad ; \quad F(8) = 2$$

Regla de Correspondencia:



Ejemplo:

$$y = 2x + 3 \quad \text{o} \quad F(x) = 2x + 3$$

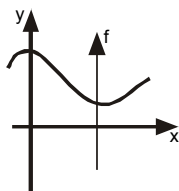
$$F(1) = 5 \quad F(3) = 9 \quad F(5) = 13 \quad F(0) = 3$$

$$F = \{(1;5), (3;9), (5;13), (0;3)\}$$

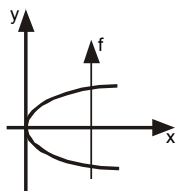
Del proceso anterior podemos decir que una relación algebraica entre la abscisa (x) y la ordenada (y) generan pares ordenados.

TEOREMA

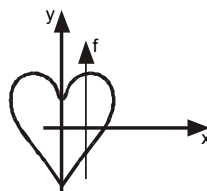
Si f es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R} \Leftrightarrow$ toda recta paralela al eje "y" corta la gráfica a los más en un punto.



Es función



No es función



No es función

Dominio

Es el conjunto de valores que puede tomar la 1ra. componente (abscisa) considerando las restricciones.

$$\boxed{2n\sqrt{\geq 0}; \frac{N}{D \neq 0}}$$

Rango

Es el conjunto de valores que asume la 2da. componente (ordenada), de acuerdo al dominio.

Ejemplo:

$$F: \{(2;5), (3;7), (8;4), (0;4)\}$$

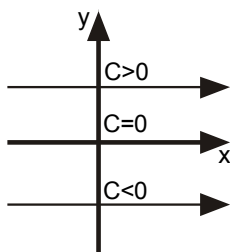
$$\text{Dom. } F = \{2; 3; 8; 0\} \quad ; \quad \text{Ran. } F = \{5; 7; 4\}$$

Funciones Especiales

1. FUNCIÓN CONSTANTE:
Regla de correspondencia:

$$\boxed{f(x)=C}$$

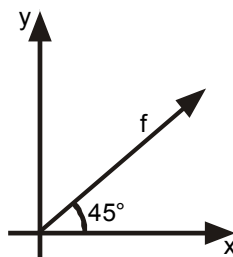
$$Df = \mathbb{R} ; Rf = \{C\}$$



2. FUNCIÓN IDENTIDAD:
Regla de correspondencia:

$$\boxed{f(x)=x \text{ o } I(x)=x}$$

$$Df = \mathbb{R} ; Rf = \mathbb{R}$$

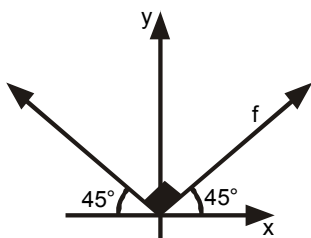


ÁLGEBRA

3. FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO:
Regla de correspondencia:

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

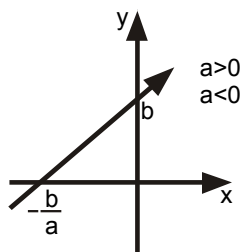
$$Df = \mathbb{R} ; Rf = \mathbb{R}_0^+$$



4. FUNCIÓN LINEAL:
Regla de correspondencia:

$$f(x)=ax+b ; a \neq 0$$

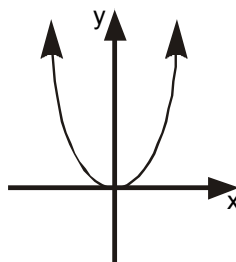
$$Df = \mathbb{R} ; Rf = \mathbb{R}$$



5. FUNCIÓN CUADRÁTICA:
Regla de correspondencia:

$$f(x)=x^2$$

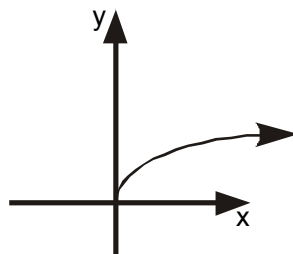
$$Df = \mathbb{R} ; Rf = \mathbb{R}_0^+$$



6. FUNCIÓN RAÍZ CUADRADA:
Regla de correspondencia:

$$f(x)=\sqrt{x}$$

$$Df = \mathbb{R}_0^+ ; Rf = \mathbb{R}_0^+$$



PROBLEMAS

1. Hallar "ab", si el conjunto de pares ordenados representa una función:

$$F = \{(2;3), (3;a-b), (2;a+b), (3;1)\}$$

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 6

2. De la función:

$$F = \{(2;2a), (2;a^2), (a;b), (a+2;b), (4;4)\}$$

Hallar "a + b"

- a) 0 b) 3 c) 5
d) 6 e) 7

3. Dado:

$$F = \{(2;3), (3;4), (4;1)\}$$

Calcular:

$$A = F_{(F_{(2)})} + F_{(F_{(3)})}$$

- a) 1 b) 5 c) 6
d) 7 e) 8

4. Dado:

$$F = \{(0;1), (1;2), (2;3)\}$$

Hallar:

$$F_{(0)}^{F_{(1)}} + F_{(1)}^{F_{(2)}} + F_{(2)}^{F_{(0)}}$$

- a) 6 b) 8 c) 10
d) 12 e) 16

5. Hallar el dominio de la función

$$F_{(x)} = \frac{7x+1}{x-7}$$

- a) $x \in R$
b) $x \in R - \{7\}$
c) $x \in R - \{1\}$
d) $x \in R - \{8\}$
e) $x \in R - \{-7\}$

6. Hallar el dominio de la función:

$$F_{(x)} = \frac{4x-2}{x+4}$$

- a) $x \in R$ b) $x \in R - \{2\}$
c) $x \in R - \{-4\}$ d) $x \in R - \{4\}$
e) $x \in R - \{1\}$

7. Hallar el rango de la función:

$$F_{(x)} = \frac{4x-1}{x+2}$$

- a) $y \in R - \{-4\}$
b) $y \in R - \{4\}$
c) $y \in R - \{2\}$
d) $y \in R - \{-2\}$
e) $y \in \emptyset$

8. Hallar el rango de la función:

$$F_{(x)} = \frac{5x+1}{2x-3}$$

- a) $y \in R - \left\{-\frac{5}{2}\right\}$
b) $y \in R - \left\{\frac{5}{2}\right\}$
c) $y \in R - \left\{\frac{2}{3}\right\}$
d) $y \in R - \left\{\frac{3}{2}\right\}$
e) $y \in R - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$

ÁLGEBRA

9. Hallar "3a - 2b" Si :

$$A = \{(2;6), (-1;3), (2;2a-b), (0;9), (-1;b-a)\}$$

Representa una función:

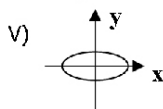
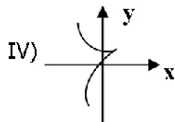
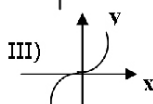
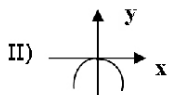
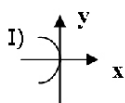
- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

10. Hallar el dominio de:

$$F(x) = \frac{1}{x-2} + \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{5-x}}$$

- a) $<0;5>$ b) $<0;5] - \{2\}$
c) $<0;5> - \{2\}$ d) $<5;5> - \{2\}$
e) $[0;5> - \{2\}$

11. ¿Cuáles de los siguientes gráficos no representa una función?



- a) Solo I b) II y III c) I, IV y V
d) IV y V e) I y III

12. Hallar el valor mínimo que tiene la ordenada en la siguiente función:

$$F(x) = x^2 - x + 3$$

- a) -1/2 b) 3 c) 11/4
d) 1/2 e) -11/4

13. Dadas las funciones:

$$f(x) = \frac{x+1}{x-2}; \quad g(x) = \sqrt{x^2-1}$$

Calcule: $D_g \cap R_f$

- a) $0; +\infty$
b) $-\infty; 0$
c) $[-1; 1$
d) $-1; 1]$
e) $-\infty; -1] \quad 1; +\infty$

14. Hallar el dominio de:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$$

- a) $-\infty; -2] \quad [-1; +\infty$
b) $-\infty; -2] \quad [1; +\infty$
c) $-\infty; -1] \quad [2; +\infty$
d) $-\infty; -2] \quad [-1; +\infty$
e) $-\infty; -2] \quad [-1; 9$

15. Sea:

$$F(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1; & x < 3 \\ 2x - 5; & x \geq 3 \end{cases}$$

Hallar: $F(5) + F(2) - F(3)$

- a) -9 b) 15 c) 16
d) -7 e) 17

16. Hallar el rango de la siguiente función:

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2}; x \in (-2; 2)$$

- a) $[0, 2]$ b) $-2, 2$
 c) $[0; +\infty$ d) $-2; 0]$
 e) $0; +\infty$

17. Si: $f(x-3) = x^2 + 5x - 2$, uno de los valores de k tal que $f(k) = k + 1$ es:

- a) -7 b) -4 c) -1
 d) 3 e) 6

18. La función $f(x) = x^2 + 3x + 3$ alcanza su valor mínimo "b" cuando $x=a$. Hallar "a+b"

- a) -2 b) $-\frac{3}{2}$ c) $-\frac{9}{2}$
 d) 0 e) $-\frac{3}{4}$

19. Si $f(x) = \frac{x}{|x|}, x \neq 0$ entonces el rango de f es:

- a) $\{0, 1\}$ b) $\{-1, 1\}$ c) $\{-2, 0\}$
 d) $\{-2, 2\}$ e) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ $f(4) = 18$

20. Una función lineal $f(x) = ax + b$; es tal que $f(1) = 6$ y $f(4) = 18$, hallar: $f(3)$

- a) 16 b) 12 c) 14
 d) -12 e) -14

CLAVES

1b	2d	3b	4d	5b
6c	7b	8b	9c	10e
11c	12c	13e	14b	15e
16a	17a	18e	19b	20c

Progresiones

Progresiones Aritméticas

Es una sucesión de números que se generan mediante la siguiente ley de formación: cada término es igual a su precedente más una cantidad constante nombrada razón o diferencia de la progresión.

ELEMENTOS

Primer término : a

Ultimo término : u

Razón o diferencia : r

Término de lugar k : T_k

Número de términos: n

Suma de términos : S

CLASES

1. CRECIENTES. Cuando la razón es una cantidad positiva.

Ejemplo:

$$\div 4, 9, 14, 19, 24, \dots (r = 9 - 4 = 5)$$

2. DECRECIENTES. Cuando la razón es una cantidad negativa.

Ejemplo:

$$\div 25, 22, 19, 16, 13, \dots (r = 22 - 25 = -3)$$

Formas de representar una P.A.

1. Cuando no se conoce el número de términos.

$$\div a \cdot a+r \cdot a+2r \cdot a+3r \cdot \dots$$

2. Cuando el número de término es impar.

$$\dots a-3r \cdot a-2r \cdot a-r \cdot a \cdot a+r \cdot a+2r \cdot a+3r \cdot \dots$$

NOTA:

Se comienza por los dos términos marcados, luego se agregan en ambos lados la misma cantidad de términos hasta completar los términos requeridos.

3. Cuando el número de términos es par.

$$\dots \cdot a-5r \cdot a-3r \cdot \textcircled{a-r} \cdot \textcircled{a+r} \cdot a+3r \cdot a+5r \cdot \dots$$

Término general de una P.A.

$$T_k = a + (k - 1)r$$

Último término de la P.A.

Si la P.A. admite "n" términos, el último ocupa la posición "n", es decir:

$T_n = u$; luego:

$$u = a + (n - 1)r$$

TEOREMA

En toda P.A. finita se verifica que la suma de dos términos equidistantes de los extremos es constante e igual a la suma de los extremos.

Sea la P.A.: $\div a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot \dots \cdot p \cdot q \cdot t \cdot u$

Luego:

$$b + t = c + q = d + p = \dots = a + u$$

CONSECUENCIA

Si la P.A. tiene un número impar de términos, el término central (T_c) es la media aritmética de los extremos.

$$T_c = \frac{a+u}{2}$$

Suma de términos de la P.A.

$$S = \left(\frac{a+u}{2} \right) n$$

Además al sustituir en esta relación:

$$u = a + (n-1)r \quad ; \text{resultará:}$$

$$S = \frac{[2a + (n-1)r]n}{2}$$

ÁLGEBRA

Interpolación de medios aritméticos

Interpolación "m" medios aritméticos o diferenciales entre dos números dados a y b es formar una P.A. con (m+2) términos cuyos extremos sean los números propuestos a y b. De lo expuesto se tiene:

$$\div a \underbrace{\hspace{2cm}}_{\substack{\text{"m" medios aritméticos} \\ \text{o diferenciales}}} b$$

$$r = \frac{b-a}{m+1}$$

r : razón de interpolación

Progresiones Geométricas

DEFINICIÓN

Es una sucesión de números en la cual el primer término es distinto de cero y cada uno de los siguientes se obtiene multiplicando su precedente por una cantidad constante, diferente de cero, nombrada razón o cociente de la progresión.

ELEMENTOS

Primer término	:	a
Último término	:	u
Razón o cociente	:	q
Término de lugar k	:	T_k
Número de términos	:	n
Suma de términos	:	S
Producto de términos	:	P

Clases

1. **CRECIENTES.** Aquellas cuya razón es mayor que la unidad.

Ejemplo:

$$\div 2 : 6 : 18 : 54 : \dots \quad (q = \frac{6}{2} = 3)$$

2. **DECRECIENTES.** Cuando su razón es un número positivo menor que la unidad.

Ejemplo:

$$\div 48 : 24 : 12 : 6 : \dots \quad (q = \frac{24}{48} = \frac{1}{2})$$

3. ALTERNADAS U OSCILANTES. Se caracteriza porque su razón es un número negativo.

Ejemplo:

$$\div \div 1 : -3 : 9 : -27 \dots (q = \frac{-3}{1} = -3)$$

Formas de representar una P.G.

1. Cuando no se conoce el número de términos.

$$\div a : aq : aq^2 : aq^3 : \dots$$

2. Cuando el número de términos es impar.

$$\dots \frac{a}{q^2} : \frac{a}{q} : \textcircled{a} : aq : aq^2$$

3. Cuando el número de términos es par.

$$\dots \frac{a}{q^5} : \frac{a}{q^3} : \frac{a}{q} : aq : aq^3 : aq^5$$

TEOREMA

En toda progresión geométrica finita, el producto de los términos equidistantes de sus extremos es constante e igual al producto de los extremos.

Sea la P.G.: $\div \div a : b : c : \dots : p : t : u$

$$bt = cp = \dots = au$$

CONSECUENCIA

Si la P.G. admite un número impar de términos, el término central (T_C) es la media geométrica de los términos extremos.

$$T_C = \sqrt{au}$$

TERMINO GENERAL DE UNA PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

$$T_k = a q^{k-1}$$

ULTIMO TÉRMINO

Si la P.G. tiene "n" términos el último ocupa la posición "n", es decir, $u = T_n$.

$$u = a q^{n-1}$$

ÁLGEBRA

PRODUCTO DE TÉRMINOS

$$P = \sqrt[n]{(au)^n}$$

SUMA DE TÉRMINOS DE UNA P.G. FINITA

$$S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$$

ó

$$S = \frac{uq - a}{q - 1}$$

Límite de una Serie Geométrica

La suma de un conjunto infinito de términos de una P.G. admite límite solamente si el valor absoluto de su razón "q" verifica $|q| < 1$; este tipo de series se nombran infinitamente decreciente y en ellas cuando $n \rightarrow \infty$, el último: $u \rightarrow 0$.

Al sustituir en la fórmula:

$$S = \frac{q - a}{q - 1} ; \quad S = \frac{0 \cdot q - a}{q - 1} = \frac{-a}{q - 1}$$

multiplicando ambos términos por -1 :

$$S = \frac{a}{1 - q} ; |q| < 1$$

INTERPOLACIÓN DE MEDIOS GEOMÉTRICOS

Interpolar "m" medios geométricos o proporcionales entre dos cantidades propuestas a y b es formar una P.G. que contiene $(m + 2)$ términos, siendo además los extremos, las cantidades propuestas. De lo expuesto se tiene:

$$\div \div a \underbrace{\dots\dots\dots}_{\text{"m" medios geométricos o proporcionales}} b$$

$$q = {}^{m+1}\sqrt{\frac{b}{a}}$$

q : razón de interpolación

PROBLEMAS

01. El tercer término de una progresión aritmética es 8 y el décimo sexto término es 47. Encuentre la razón.

- a) 2 b) 3 c) 4
d) 5 e) 6

02. Hallar el primer término de una progresión aritmética cuya suma de los 4 primeros términos es 20 y su razón 6.

- a) 2 b) 3 c) -4
d) 5 e) -6

03. La suma de los "n" primeros términos de una progresión aritmética es 117; la razón 2 y el primer término 5. Hallar el valor de "n".

- a) 7 b) 3 c) 11
d) 5 e) 9

04. Hallar el primer término y la razón de la progresión aritmética, cuyo último término es 16 y la suma de sus 10 términos es igual a 70. Indicar la suma de ellos.

- a) 2 b) 3 c) 4
d) 5 e) 6

05. En una progresión aritmética el término de lugar 53 es 5 y el de lugar 17 es -58. Hallar la razón.

- a) 9/4 b) 3/4 c) 7/4
d) 11/2 e) 3/8

06. La suma de los 57 términos de una progresión aritmética es 228; hallar el término central de la misma.

- a) 2 b) 3 c) 4
d) 5 e) 6

07. En una progresión aritmética de 25 términos se sabe:

$$t_3 + t_{23} = 56$$

Hallar la suma de todos sus términos.

- a) 640 b) 720 c) 100
d) 700 e) 540

08. Interpolar 3 medios aritméticos entre 13 y 21. Hallar el cuarto término obtenido.

- a) 21 b) 17 c) 19
d) 15 e) 16

09. Interpolar 4 medios diferenciales entre -8 y 12. Indicar el tercer término obtenido.

- a) 2 b) 3 c) 4
d) 5 e) 0

10. El número de términos de la siguiente progresión geométrica:

$$\div \div 2 : 8 : \dots 8192 \quad \text{es}$$

- a) 2 b) 3 c) 4
d) 7 e) 6

ÁLGEBRA

11. Si el quinto término de una progresión geométrica es 48 y el primero es 3. calcular la suma de los tres primeros de lugares impares.

a) 60 b) 63 c) 54
d) 687 e) 70

12. En una progresión geométrica la razón es 0,5 y el decimosegundo término es 72. Calcular el octavo término.

a) 1125 b) 1162 c) 114
d) 1152 e) 3456

13. Hallar el producto de los 11 primeros términos de una progresión geométrica, sabiendo que el término central es 2.

a) 3072 b) 1024 c) 64
d) 2048 e) 5120

14. Interpolan 6 medios geométricos entre $\frac{1}{3}$ y 729. Hallar el segundo término.

a) 1 b) 3 c) 4
d) 5 e) 6

15. La suma de tres números en P.A. es 21; si a los dos primeros se les suma 3 y al último 8, los nuevos números forman una progresión geométrica. Hallar el valor del mayor de los términos.

a) 20 b) 12 c) 7
d) 9 e) 15

16. Calcular:

$$S = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \dots$$

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{4}$
d) 1 e) $\frac{1}{6}$

17. Hallar la suma limite:

$$S = \frac{1}{7} + \frac{2}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \dots$$

a) $\frac{21}{16}$ b) $\frac{1}{8}$ c) $\frac{3}{16}$
d) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{1}{5}$

18. Calcular la suma limite:

$$S = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{2}{3}\right)^4 + 3\left(\frac{2}{3}\right)^6 + 4\left(\frac{2}{3}\right)^8 + \dots$$

a) $\frac{36}{25}$ b) $\frac{25}{36}$ c) $\frac{1}{4}$
d) 4 e) 20

19. Se deja caer una pelota desde una altura de 17 m. En cada rebote alcanza los $\frac{2}{3}$ de la altura anterior. ¿Qué distancia recorre hasta detenerse?

a) 40 b) 50 c) 65
d) 80 e) 85

20. Calcular :

$$S = \frac{3}{2^2} + \frac{7}{2^4} + \frac{15}{2^6} + \dots$$

a) $\frac{5}{3}$ b) $\frac{5}{4}$ c) $\frac{7}{3}$
d) 687 e) 70

CLAVES

01b	02c	03e	04c	05c
06c	07d	08c	09e	10d
11b	12d	13d	14a	15a
16a	17c	18a	19e	20a

Logarítmos

El logaritmo de un número real positivo, en una base positiva y diferente de la unidad, es el exponente al cual hay que elevar al número denominado base para que nos reproduzca el número dado.

$$\boxed{\text{Log}_b N = \alpha \quad \rightarrow \quad N = b^\alpha}$$

Siendo: $N > 0$; $b > 0 \wedge b \neq 1$

Ejemplos:

$$\text{Log}_5 25 = 2 \quad \rightarrow \quad 25 = 5^2$$

$$\text{Log}_3 1 = 0 \quad \rightarrow \quad 1 = 3^0$$

Principales relaciones

$$\text{Se sabe: } \text{Log}_b N = \alpha \quad \dots (1)$$

$$N = b^\alpha \quad \dots (2)$$

De (1) en (2):

$$\boxed{N = b^{\text{Log}_b N}}$$

De (2) en (1):

$$\boxed{\text{Log}_b b^\alpha = \alpha}$$

Ejemplo:

$$\sqrt{2}^{\text{Log} \sqrt{2}^5} = 5$$

$$\text{Log}_m m^4 = 4 \quad (m > 0 \wedge m \neq 1)$$

Propiedades

1. LOGARITMO DE UN PRODUCTO

$$\boxed{\text{Log}_b M + \text{Log}_b N = \text{Log}_b (MN)}$$

2. LOGARITMO DE UNA FRACCIÓN

$$\boxed{\text{Log}_b M - \text{Log}_b N = \text{Log}_b \left(\frac{M}{N} \right)}$$

ÁLGEBRA

3. LOGARITMO DE UNA POTENCIA

$$n \log_b N = \log_b N^n$$

4. CAMBIO DE BASE

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$$

5. REGLA DE LA CADENA

$$\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c m = \log_a m$$

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

6. ADICIONALES

$$\log_b N = \log_{\sqrt[n]{b}} \sqrt[n]{N}$$

$$\log_b N = \log_{b^a} N^a$$

$$a^{\log_b N} = N^{\log_b a}$$

Cologaritmos

$$\text{Colog}_b N = \log_b \left(\frac{1}{N} \right) = -\log_b N$$

Ejemplos:

$$\text{Colog}_5 25 = \log_5 \left(\frac{1}{25} \right) = -2$$

$$\text{Colog}_2 \left(\frac{1}{8} \right) = \log_2 8 = 3$$

Antilogaritmo

$$\text{Antilog}_b N = b^N$$

Ejemplo:

$$\text{Antilog}_3 4 = 3^4 = 81$$

$$\text{Antilog}_2 5 = 2^5 = 32$$

PROPIEDADES

$$\log_b \text{Antilog}_b N = N$$

$$\text{Antilog}_b \log_b N = N$$

PROBLEMAS

01. Efectuar:

$$M = \log_5 125 - \log 100 + \log_2 64$$

- a) 3 b) 4 c) 5
d) 6 e) 7

02. Calcular:

$$R = \log_4 8 - \log_9 27 + \log_{\sqrt{5}} 25$$

- a) 3 b) 4 c) 5
d) 6 e) 7

03. Efectuar:

$$S = 3^{\log_3 7} + 2^{\log_8 27} + 4^{\log_2 3}$$

- a) 13 b) 14 c) 15
d) 16 e) 19

04. Calcular:

$$A = \log_2 \log_3 \sqrt[4]{\sqrt[4]{\sqrt[4]{\sqrt[4]{3}}}}$$

- a) 3 b) 4 c) 8
d) 6 e) 7

05. Calcular:

$$M = \log_{\sqrt[15]{216}} 6 \sqrt[5]{36}$$

- a) 1 b) 4 c) 5
d) 9 e) 7

06. Resolver:

$$9^{\log_3 (x+2)} = x^2 + 12$$

- a) 3 b) 4 c) 5
d) 6 e) 2

07. Resolver:

$$5^{2\log_5 x} + 3^{2\log_3 2} = 7^{\log_7 4x}$$

- a) 2 b) 4 c) 5
d) 6 e) 8

08. Calcular:

$$\log_2 6 \cdot \log_3 6 - \log_2 3 - \log_3 2$$

- a) 0 b) 1 c) 2
d) 6 e) 5

09. Resolver:

$$\log x = \frac{1}{2} \log a - 2 \log b$$

- a) $\sqrt{a}$ b) $\frac{\sqrt{a}}{b^2}$ c) $\frac{\sqrt{a}}{2}$
d) 1 e) ab

10. Calcular:

$$E = 1 - \operatorname{colog}_2 \operatorname{antilog}_4 \log_5 625$$

- a) 9 b) 3 c) -9
d) -7 e) 7

11. Calcular:

$$M = -\operatorname{colog}_4 \operatorname{antilog}_2 \log_2 \operatorname{antilog}_2 4$$

- a) 2 b) 4 c) 5
d) 8 e) 7

ÁLGEBRA

12. Calcular "x":

$$4\log\frac{x}{2} + 3\log\frac{x}{3} = 5\log x - \log 27$$

- a) 3 b) 4 c) 5
d) 6 e) 0

13. Calcular:

$$\log_3(2x + 1) + \log_{1/3}(x + 8) = 0$$

- a) 3 b) 4 c) 8
d) 6 e) 7

14. Resolver:

$$x^{1+\log_x(x+2)} = 3$$

- a) -3 b) 1 c) Incompatible
d) 1 y -3 e) Indeterminado.

15. Resolver:

$$10^{\log_x(x^2-3x+5)} = 3^{\log_x 10}$$

- a) 2 b) 1 c) 1 y 2
d) 6 e) Incompatible

16. Resolver:

$$\log_2 \log_3 (x - 2) = 2$$

- a) 83 b) 94 c) 72
d) 76 e) 81

17. Resolver:

$$\ln(\ln(\ln x)) = 0$$

- a) e^2 b) e^3 c) $2e$
d) e^e e) $3e$

18. Dado el sistema:

$$\begin{cases} 10^x + 10^y = a \\ x - y = \log\left(\frac{a+b}{a-b}\right) \end{cases}$$

Calcular: $10^x - 10^y$

- a) $2a$ b) a c) $2b$
d) b e) $a+b$

19. Si:

$$a = 1 + \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}\dots}}$$
$$b = 3 + \sqrt{6\sqrt{6\sqrt{6}\dots}}$$

Calcular: $M = \log_b a$

- a) 3 b) 4 c) $1/2$
d) 6 e) $3/2$

20. Calcular:

$$\log x = \log\left(1 + \frac{1}{1}\right) + \log\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \log\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \dots + \log\left(1 + \frac{1}{2005}\right)$$

- a) 32 b) 4 c) 1
d) 2006 e) 2007

CLAVES				
01e	02b	03e	04c	05e
06e	07a	08c	09b	10a
11a	12b	13e	14c	15a
16a	17d	18d	19c	20d