

Presentación

El presente libro ha sido fruto del esfuerzo de los docentes del curso.

La intención de este libro es que sirva como complemento al alumno en su proceso de aprendizaje.

El desarrollo del curso se ha dividido en 16 unidades que comprenden los temas más importantes que se piden conocer en todas las universidades.

Cada unidad consta de una primera parte (teórica) compuesta de conceptos, definiciones y propiedades.

La segunda parte (práctica) está conformada por un bloque de problemas aplicativos, presentados en forma didáctica y de menor a mayor grado de dificultad con la finalidad de mejorar el entendimiento de cada tema.

También se presentan problemas con aplicaciones en otras ciencias.

Así mismo, otros cuya finalidad es la de reforzar y asimilar la teoría aprendida, desarrollando la imaginación y creatividad del alumno.

No pretendemos que este libro sea un tratado completo de la Geometría Moderna, pero sí esperamos sinceramente que señale el camino hacia una enseñanza más inspirada de la Geometría.

Deseamos expresar nuestro agradecimiento a todos los alumnos que integran nuestra institución y que nos inspiran cada día para presentarles un mejor libro.

Índice

UNIDAD 1	Segmentos	3
UNIDAD 2	Ángulos Consecutivos	7
UNIDAD 3	Ángulos entre Paralelas	11
UNIDAD 4	Triángulos I: Propiedades Básicas	15
UNIDAD 5	Triángulos II: Líneas y Puntos Notables	21
UNIDAD 6	Congruencia de Triángulos.....	29
UNIDAD 7	Polígonos y Cuadriláteros	35
UNIDAD 8	Circunferencia I: Propiedades de Tangencia.....	43
UNIDAD 9	Circunferencia II: Ángulos en la Circunferencia	49
UNIDAD 10	Proporcionalidad y Semejanza de Triángulos	55
UNIDAD 11	Relaciones Métricas en la Circunferencia y en los Triángulos Rectángulos	61
UNIDAD 12	Relaciones Métricas en los Triángulos Oblicuángulos	67
UNIDAD 13	Áreas I	73
UNIDAD 14	Áreas II	79
UNIDAD 15	Geometría del Espacio	85
UNIDAD 16	Geometría Analítica	91

Segmentos

Geometría

Es una parte de la matemática que tiene por objeto el estudio de las propiedades y relaciones de las **figuras geométricas**.

División

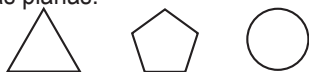
a) **GEOMETRÍA PLANA** o PLANIMETRÍA, que se ocupa de todas aquellas figuras cuyos puntos que lo constituyen se hallan en un mismo plano. Ejemplo: el ángulo, los triángulos, la circunferencia, etc.

b) **GEOMETRÍA DEL ESPACIO** o ESTEREOMETRÍA, que se ocupa del estudio de todas aquellas figuras cuyos puntos que lo constituyen no se hallan en un mismo plano. Ejemplo: el prisma, el cono, la esfera, etc.

Figura geométrica

Se define como *figura geométrica* al conjunto infinito de puntos, las pueden ser planas o del espacio (sólidas). Ejemplos:

Figuras planas:

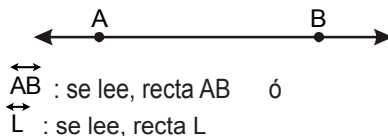


Figuras sólidas:



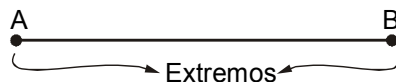
Línea recta

Concepto matemático no definible. Se considera como un conjunto de puntos ubicados en una misma dirección e ilimitada en ambos sentidos.



Segmento

Porción de línea recta limitada por dos puntos llamados *extremos del segmento*.



$\overline{AB}$: se lee, segmento AB

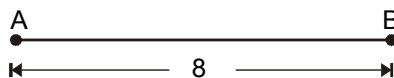
Medida del segmento

Número de veces de una unidad de longitud.



$\overline{AB}$ o AB : se lee, medida del segmento AB.

Ejemplo:



AB = 8

GEOMETRÍA

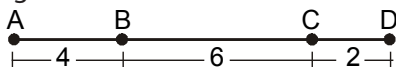
Punto medio de un segmento

Punto del segmento que equidista de los extremos.



Si "M" es punto medio del $\overline{AB}$, entonces $AM = MB = a$.

Operaciones con longitudes de segmentos



Para el gráfico:

Suma: $AB + BC + CD = AD$

Resta: $AB = AD - BD$

Multipliación: $AC = 5CD$

División: $AB = \frac{BD}{2}$

PROBLEMAS APLICATIVOS

1. Sobre una línea recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C y D; de tal manera que: $AB=a$; $BC=b$. Calcular CD.

Si: $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}$

- a) $\frac{b(a+b)}{(a-b)}$ b) $\frac{b(a-b)}{(b-a)}$ c) $\frac{a(a+b)}{(b-a)}$
d) $\frac{(a+b)}{(a-b)}$ e) $\frac{(a-b)}{(a+b)}$

2. Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C y D. Calcular BC, si: $AD=30$; $AC=18$ y $BD=20$.

- a) 6 b) 8 c) 10
d) 12 e) 14

3. Se tienen los puntos colineales y consecutivos A, B, C y D. Calcular AD, si: $AC=26$; $BC=12$; $BD=32$.

- a) 32 b) 36 c) 40
d) 46 e) 50

4. En una recta se ubican los puntos consecutivos P, Q, R, S y T; tal que: $(PS)(QT)=63$. Calcule: $PS-QT$

Si: $PR+QR+RS+RT=16$; $(PS>QT)$

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

5. Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C y D. Si: $AB=3BC=5CD$ y $AD=46$. Calcular BD.

- a) 20 b) 24 c) 25
d) 16 e) 32

6. Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C, D y E si se cumple que:

$$AB = \frac{BC}{2} = \frac{CD}{5} = \frac{DE}{9}; AE=51$$

Calcular: AC

- a) 9 b) 10 c) 12
d) 15 e) 18

7. Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C y D; Sabiendo que $AC=18$ y $BD=34$. Calcular la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

- a) 20 b) 23 c) 25
d) 26 e) 30

8. Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C y D; si $AB=x-y$; $BC=x+y$; $CD=2y-x$ y $AD=24$. Calcular la suma del mínimo y máximo valor entero que puede tomar x.

- a) 14 b) 16 c) 18
d) 20 e) 24

9. Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C y D. Calcular AC, si: $CD=4AB$; $AD+4BC=80$
a) 12 b) 15 c) 16
d) 18 e) 20

10. Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C y D. Calcular: BC ; $AD=40$; $BD=28$ y $AC=15$.
a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

11. Se tienen los puntos colineales y consecutivos A, B, C, D y E. Calcular CD, si: $AE=30$; $AD=26$; $BE=14$ y $BC=3$.
a) 3 b) 4 c) 5
d) 6 e) 7

12. Sobre una recta se dan los puntos consecutivos A, B, C y D; tal que:
 $BC=\frac{CD}{3}$; y $3AB+AD=20$
Calcular AC.
a) 5 b) 6 c) 8
d) 10 e) 12

13. Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C y D que forman una cuaterna armónica.
Calcular AD, si:
$$\frac{2}{AC} - \frac{1}{AB} = \frac{1}{10}$$

a) 6 b) 8 c) 10
d) 12 e) 14

14. Se tienen los puntos colineales y consecutivos A, B, C y D. Calcular BD, si: $BC=6$, $\frac{AB}{CD} = \frac{2}{3}$ y $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}$
a) 12 b) 16 c) 18
d) 22 e) 24

15. Sean los puntos colineales y consecutivos A, B, C y D; tal que: $BC=AB+3$ y $CD=AB-1$. Calcular AD, si AB toma su mínimo valor entero.
a) 6 b) 8 c) 10
d) 12 e) 15

PROBLEMAS PROPUESTOS

- En una recta se ubican los puntos consecutivos A, M, B, C, N y D; siendo M y N puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ respectivamente. Si $BC=3m$ y $MN=9m$; halle AD.
a) 12 m b) 15 m c) 9 m
d) 8 m e) 18 m
- En una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C y D. Si $AB=4m$; $BC=2m$ y $AB \cdot CD=BC \cdot AD$. Halle: CD
a) 4 m b) 2 m c) 6 m
d) 3 m e) 8 m
- En una recta se tienen los puntos consecutivos A, B, C, D y E. Si: $AE=110m$ y $AB=\frac{BC}{5}=\frac{CD}{7}=\frac{DE}{9}$. Halle: CE.
a) 68 m b) 50 m c) 70 m
d) 60 m e) 80 m
- En una recta se tienen los puntos consecutivos A, B, C y D; luego se ubican los puntos medios M y N de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ respectivamente. Si: $AC=8m$ y $BD=16m$. Halle: MN.
a) 8 m b) 9 m c) 11 m
d) 12 m e) 13 m
- En la figura, $AC=2AB+40$. Halle "x".

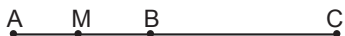
a) 30 m b) 10 m c) 15 m
d) 20 m e) 40 m
- En una recta se tienen los puntos consecutivos A, B y D, entre los puntos B y D se toma el punto C. Si: $CD=4AC$ y $BD-4AB=20$. Halle: BC
a) 3 b) 5 c) 4
d) 2 e) 1
- En una recta se tiene los puntos consecutivos A, B y C; luego se ubica M punto medio de $\overline{BC}$. Si: $BC=4m$ y $AB \cdot AC=3$. Halle: AM
a) 3 m b) 5 m c) 4 m
d) $\sqrt{7}m$ e) 1 m

GEOMETRÍA

8. En la figura, M es punto medio de $\overline{AC}$ y $BC-AB=12$ m. Halle: BM



- a) 4 m b) 1 m c) 2 m
d) 6 m e) 3 m
9. En una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C, D, E y F; E es punto medio de $\overline{DF}$. Si: $AB=DE$; $DE=3BC$; $AD=18$ m y $BF=27$ m. Halle: CD
- a) 6 m b) 8 m c) 4 m
d) 7 m e) 5 m
10. En una recta se tienen los puntos consecutivos A, B, C y D. Si: $3AB=2BC$; $AD=96$ m y $CD=AB+AC$; halle: BC
- a) 21 m b) 28 m c) 56 m
d) 40 m e) 24 m
11. En la figura M es punto medio de $\overline{AB}$. Si: $AC+BC=20$ m, halle MC.



- a) 12 m b) 6 m c) 8 m
d) 10 m e) 15 m

12. En una recta se tienen los puntos consecutivos A, B, C y D. Si: $AB=4$ m; $CD=6$ m y $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AD} = \frac{2}{AC}$, halle: BC

- a) 3 m b) 2 m c) 3,5 m
d) 1,5 m e) 2,5 m

13. Se tienen los puntos colineales y consecutivos A, B, C, D y E. Si: $2AE=3BD$ y $AC+BD+CE=45$ m.

Halle: AE

- a) 21 m b) 23 m c) 25 m
d) 27 m e) 29 m

14. Los puntos A, B, C y D son colineales y consecutivos. Si: $BC=2AB$; $CD=AB+BC$ y $BD=10$ m. Halle: AD

- a) 15 m b) 18 m c) 14 m
d) 12 m e) 16 m

15. En una recta se tienen los puntos consecutivos A, B, C y D. Si: $CD=2BC$ y $2AB+AD=21$. Halle AC.

- a) 6 m b) 10 m c) 8 m
d) 7 m e) 9 m

CLAVES

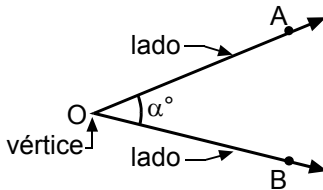
1.a	2.b	3.d	4.b	5.d
6.a	7.d	8.c	9.c	10.c
11.e	12.a	13.c	14.d	15.b
1.a	2.c	3.e	4.d	5.e
6.c	7.d	8.d	9.a	10.e
11.d	12.b	13.d	14.d	15.d

Ángulos Consecutivos

Ángulo

Definición

Reunión de dos rayos no colineales con un mismo origen. Dicho origen se llama vértice y los rayos se denominan lados.



$$m \angle AOB = \alpha$$

Elementos

* Vértice: O

* Lados: $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$

Clases de ángulos

I. Según su medida

1. Ángulos convexos

Agudo

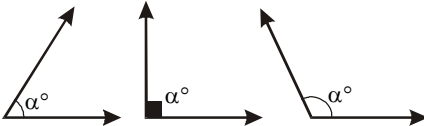
$$0^\circ < \alpha < 90^\circ$$

Recto

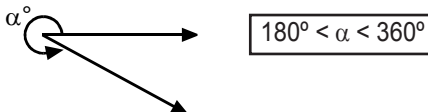
$$\alpha = 90^\circ$$

Obtuso

$$90^\circ < \alpha < 180^\circ$$



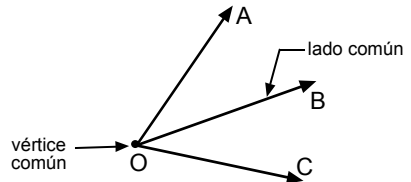
2. Ángulos no convexos



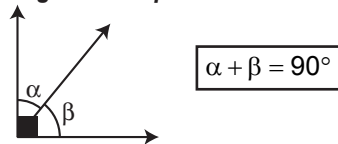
II. Según su característica

1. Ángulos consecutivos

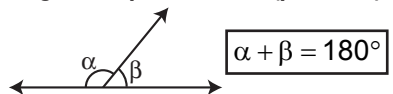
- Ángulos adyacentes



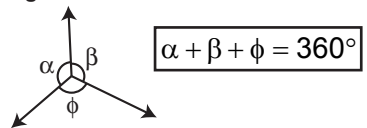
- Ángulos complementarios



- Ángulos suplementarios (par lineal)



- Perigono



2. Ángulos complementarios

Dos ángulos son complementarios si sus medidas suman 90° .



Donde:

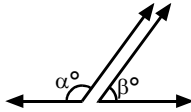
C_α : Complemento de α $C_\alpha = 90^\circ - \alpha$

C : Complemento de $C = 90^\circ -$

GEOMETRÍA

3. Ángulos suplementarios

Dos ángulos son suplementarios si sus medidas suman 180° .



$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

Donde:

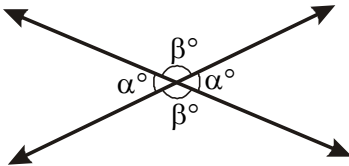
S_α : Suplemento de α

$$S_\alpha = 180^\circ - \alpha$$

S : Suplemento de

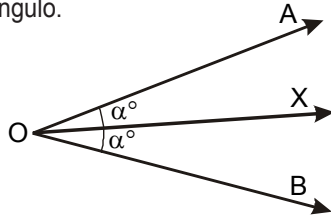
$$S = 180^\circ -$$

4. Ángulos opuestos por el vértice



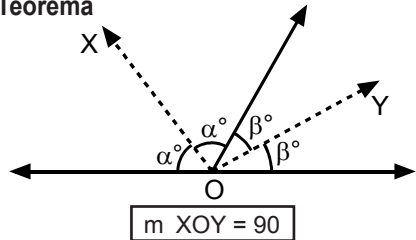
Bisectriz

Es el rayo que parte del vértice y biseca al ángulo.



$\overline{OX}$: Bisectriz del $\angle AOB$

Teorema



PROBLEMAS APLICATIVOS

1. La relación entre el complemento y suplemento de la medida de un mismo ángulo es un tercio. Calcular la medida del ángulo.

- a) 55 b) 37 c) 60
d) 30 e) 45

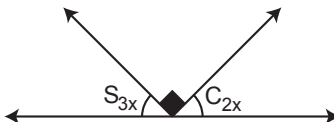
2. El suplemento del complemento de un ángulo es el sextuplo de la medida de dicho ángulo. ¿Calcule la medida de dicho ángulo?

- a) 10 b) 15 c) 16
d) 12 e) 18

3. En la figura, calcule "x".

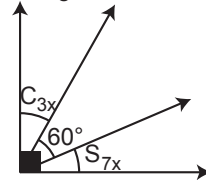
Si: S : Suplemento

C : Complemento



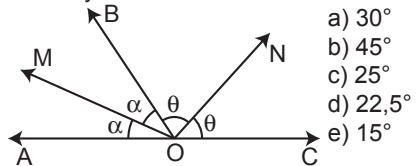
- a) 24
b) 18
c) 36
d) 15
e) 12

4. En la figura, calcule "x".



- a) 15
b) 10
c) 18
d) 12
e) 24

5. En la figura, calcule el ángulo formado por las bisectrices de los ángulos AON y MOC.



- a) 30°
b) 45°
c) 25°
d) $22,5^\circ$
e) 15°

6. Calcule "x".

Si: S : Suplemento

C : Complemento

$$SC_{3x} = 5(x+8)$$

- a) 25 b) 30 c) 60
d) 50 e) 35

7. Calcule "x".

Si: S : Suplemento

C : Complemento

$$x + Sx = 3(Cx)$$

- a) 25 b) 15 c) 45
d) 40 e) 30

8. Calcule "x".

Si: S : Suplemento

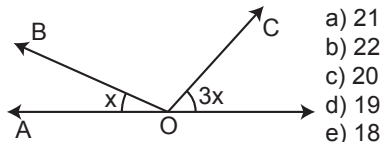
C : Complemento

$$x - Cx = Sx$$

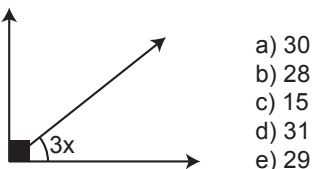
- a) 80° b) 70° c) 60°
d) 90° e) 45°

9. Calcule el mayor valor entero de "x".

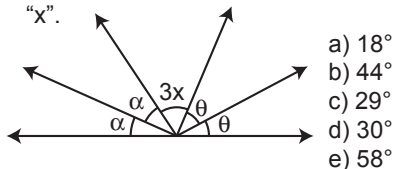
Si: m BOC es obtuso.



10. Calcule el máximo valor entero de "x".

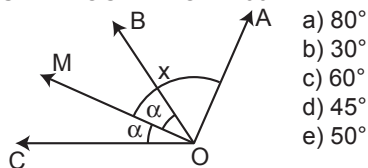


11. Calcule el máximo valor entero de "x".



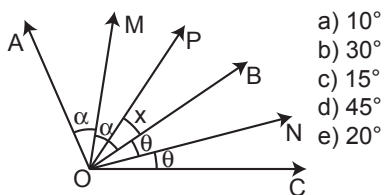
12. Calcule "x".

Si: m AOC+m AOB=100°



13. En la figura, calcule "x". $\overline{OP}$ es bisectriz de la m AOC.

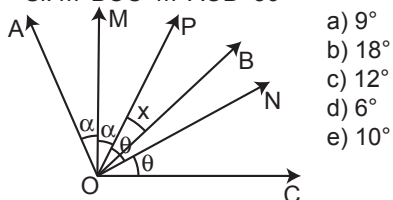
Si: m AOB-m BOC=40°



- a) 10°
b) 30°
c) 15°
d) 45°
e) 20°

14. Calcule "x", $\overline{OP}$ es bisectriz de la m MON.

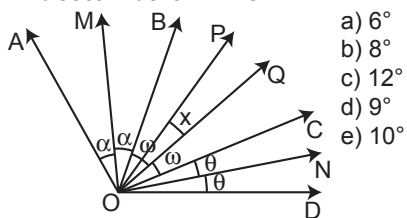
Si: m BOC-m AOB=36°



- a) 9°
b) 18°
c) 12°
d) 6°
e) 10°

15. Calcule "x".

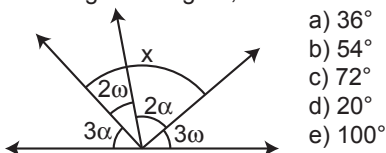
Si: m AOB-m COD=24 y $\overline{OP}$ es bisectriz de la m MON.



- a) 6°
b) 8°
c) 12°
d) 9°
e) 10°

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. En la siguiente figura, calcule "x".



- a) 36°
b) 54°
c) 72°
d) 20°
e) 100°

2. Dados los ángulos consecutivos AOB, BOC y COD; de manera que: m AOD=90° y m BOC=50°; calcule la suma de las m AOC y m BOD.

- a) 150 b) 100 c) 110
d) 120 e) 140

3. A la medida de un ángulo se le quita las 3/5 partes del total menos 4°, luego la cuarta parte del resto mas 3° y enseguida los 2/5 del nuevo resto

GEOMETRÍA

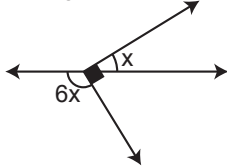
mas 12° . Si aún le quedan 24° , ¿cuál es su medida?

a) 200 b) 120 c) 180 d) 240 e) 150

4. El complemento de la diferencia que existe entre el suplemento y complemento de x° ; es igual al duplo del complemento de x° , calcule el complemento de x° .

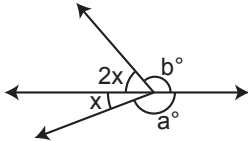
a) 90° b) 0° c) 45° d) 70° e) 20°

5. En la figura, calcule " x ".



a) 30°
b) 24°
c) 18°
d) 42°
e) 45°

6. Calcule " x ". Si: $a^\circ - b^\circ = 12^\circ$



a) 6°
b) 12°
c) 24°
d) 18°
e) 9°

7. El doble del complemento de un ángulo, más el triple del suplemento del mismo, es 500° . Calcule la medida del ángulo.

a) 48° b) 22° c) 54° d) 24° e) 44°

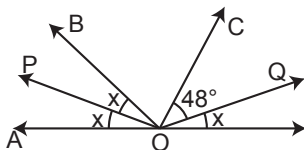
8. El doble de la medida de un ángulo es igual al triple de la medida de su complemento. Calcule la medida del ángulo.

a) 54° b) 36° c) 32° d) 27° e) 58°

9. Se tiene los ángulos consecutivos AOB, BOC y COD; tal que $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$ y $\overrightarrow{OS}$ son las bisectrices de los ángulos AOB, COD, AOC y BOD respectivamente. Si: $m \angle POQ + m \angle ROS = 144^\circ$, calcule la $m \angle AOD$.

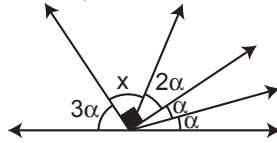
a) 144° b) 72° c) 288° d) 128° e) 124°

10. Calcule " x ", si: $\overrightarrow{OC}$ es bisectriz de la $m \angle BOD$.



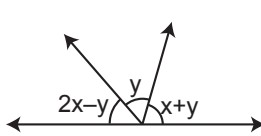
a) 18°
b) 36°
c) 14°
d) 42°
e) 21°

11. En la figura, calcule " x ".



a) 27°
b) 72°
c) 28°
d) 36°
e) 54°

12. Calcule el menor valor entero que puede tomar " x ".



a) 37°
b) 53°
c) 59°
d) 62°
e) 36°

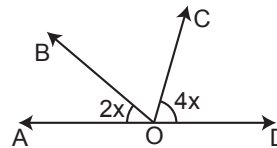
13. La suma de las medidas de dos ángulos es 80° y el complemento de la medida del primero es igual al doble de la medida del segundo. Calcule la diferencia de dichos ángulos.

a) 50° b) 60° c) 65°
d) 70° e) 72°

14. El complemento de un ángulo es menor que 50° , calcule el mínimo valor entero que puede tomar dicho ángulo.

a) 48° b) 40° c) 41°
d) 61° e) 59°

15. Calcule el mínimo valor entero que puede tomar " x ", si: $m \angle BOC$ es agudo.



a) 27°
b) 36°
c) 15°
d) 18°
e) 16°

CLAVES

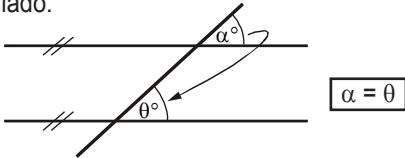
1.e	2.e	3.c	4.e	5.b
6.a	7.e	8.d	9.b	10.e
11.e	12.e	13.e	14.a	15.a
1.c	2.e	3.a	4.b	5.c
6.b	7.b	8.e	9.a	10.a
11.e	12.a	13.b	14.c	15.e

Ángulos entre Paralelas

Ángulos entre dos rectas paralelas

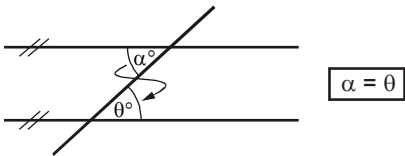
Ángulos correspondientes

Uno interno y el otro externo, a un mismo lado.



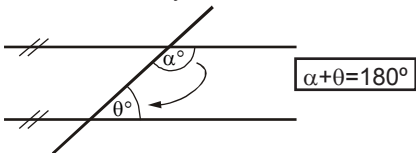
Ángulos alternos internos

Ambos internos, uno en cada lado.

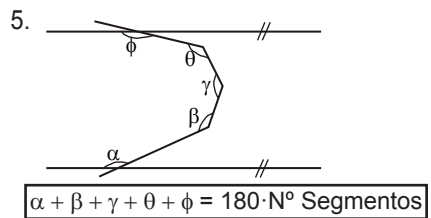
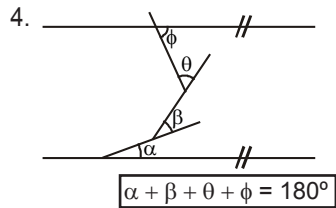
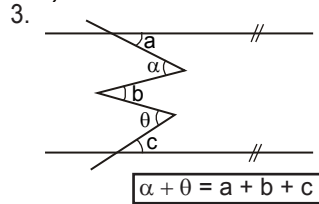
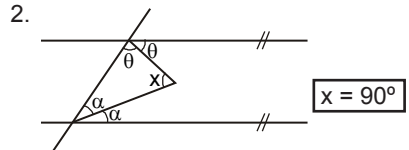
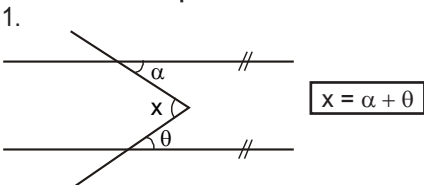


Ángulos conjugados internos

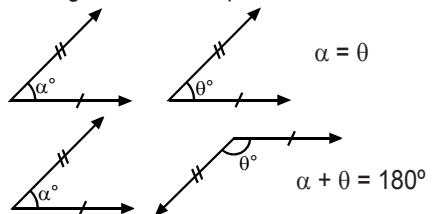
Ambos internos y en un mismo lado.



Propiedades



6. Ángulos de lados paralelos

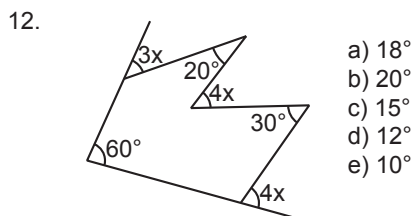
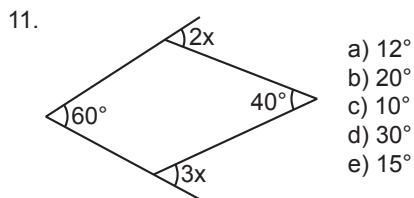
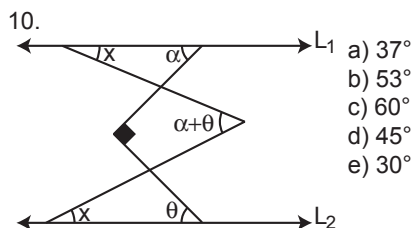
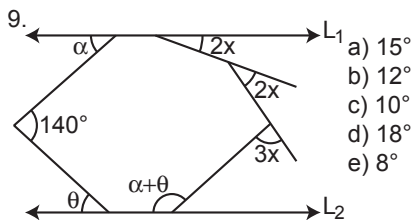
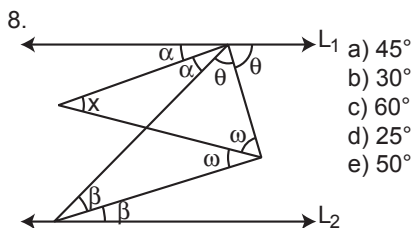
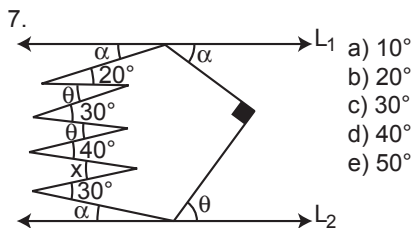
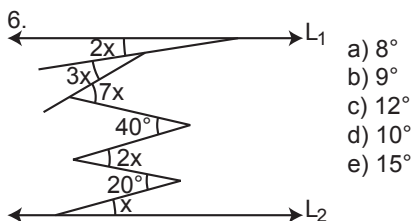
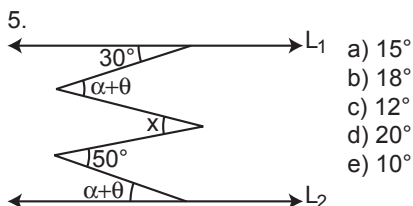
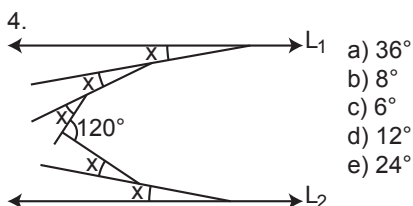
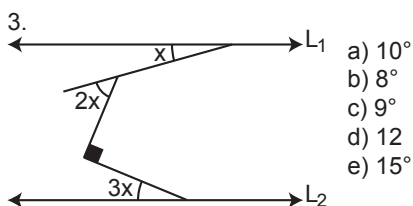
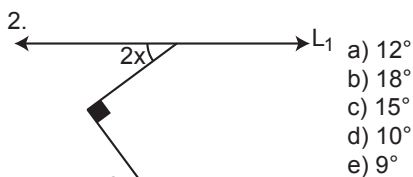
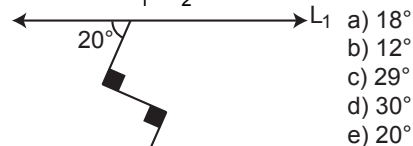


GEOMETRÍA

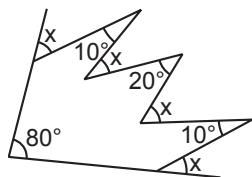
PROBLEMAS APLICATIVOS

1. En cada uno de los gráficos, calcule

"x". Si: $\vec{L}_1 // \vec{L}_2$

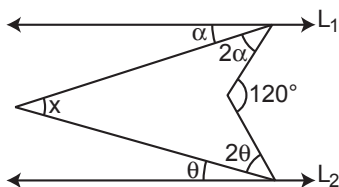


13.



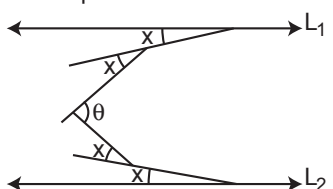
- a) 30°
- b) 20°
- c) 10°
- d) 15°
- e) 12°

14.



- a) 30°
- b) 45°
- c) 15°
- d) 20°
- e) 40°

15. Calcule el menor valor entero de "x".
Si: q es obtuso

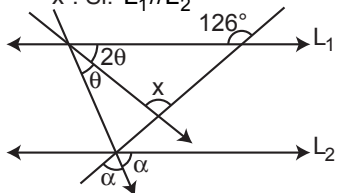


- a) 60°
- b) 59°
- c) 29°
- d) 23°
- e) 24°

PROBLEMAS PROPUESTOS

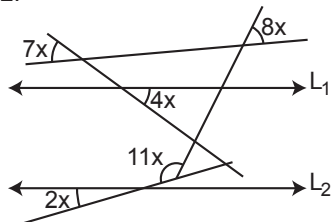
1. En cada uno de los gráficos, calcule

"x". Si: $\vec{L}_1 // \vec{L}_2$



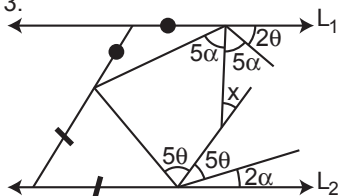
- a) 54°
- b) 84°
- c) 56°
- d) 72°
- e) 90°

2.



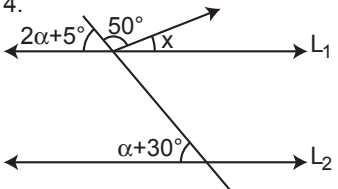
- a) 12°
- b) 8°
- c) 10°
- d) 9°
- e) 6°

3.



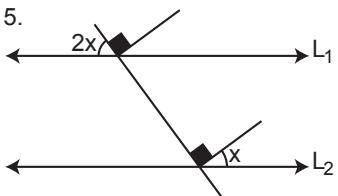
- a) 18°
- b) 36°
- c) 52°
- d) 45°
- e) $22,5^\circ$

4.



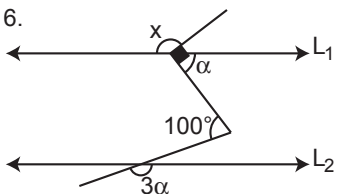
- a) 45°
- b) 55°
- c) 65°
- d) 75°
- e) 35°

5.



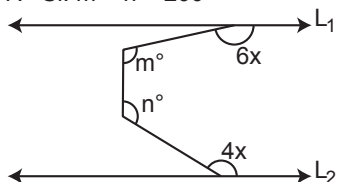
- a) 12°
- b) 18°
- c) 20°
- d) 15°
- e) 30°

6.



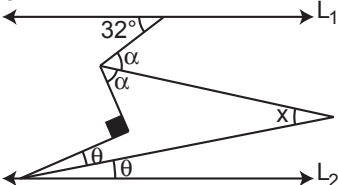
- a) 130°
- b) 140°
- c) 120°
- d) 100°
- e) 110°

7. Si: $m + n = 200^\circ$



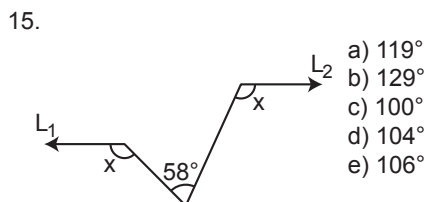
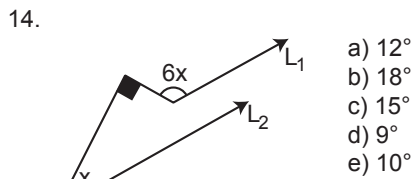
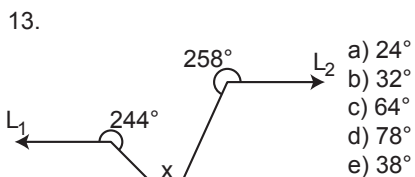
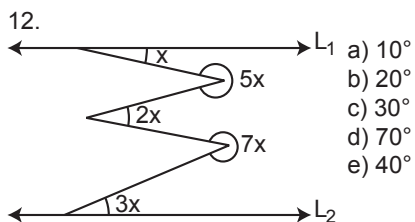
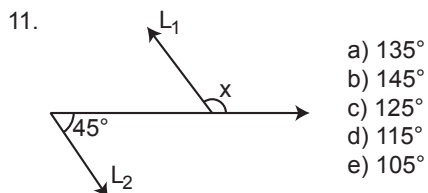
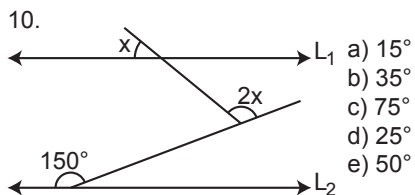
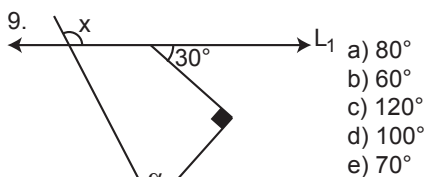
- a) 6°
- b) 32°
- c) 28°
- d) 17°
- e) 34°

8.



- a) 16°
- b) 14°
- c) 28°
- d) 29°
- e) 32°

GEOMETRÍA



CLAVES

1.e	2.b	3.e	4.e	5.d
6.e	7.c	8.a	9.c	10.d
11.b	12.e	13.a	14.e	15.d
1.b	2.d	3.e	4.d	5.e
6.a	7.e	8.d	9.c	10.e
11.a	12.e	13.e	14.b	15.a

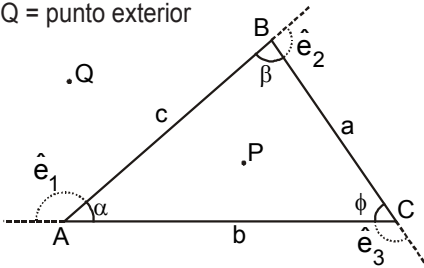
Triángulos I: Propiedades Básicas

Definición

Dados los puntos A, B, C; se define triángulo como la reunión $\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{AC}$.

P = punto interior

Q = punto exterior



Notación

$\triangle ABC \rightarrow$ se lee: triángulo ABC

Elementos

Vértices: A, B, y C

Lados: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$.

Del gráfico se observa

Longitud de sus lados: a, b y c

m internos: α , β y ϕ

m externos: $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$ y $\hat{e}_3$

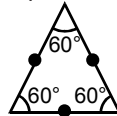
Perímetro: $2p = a + b + c$

Semiperímetro: $p = \frac{a+b+c}{2}$

Clasificación

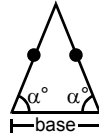
I. Por la medida de sus lados

Equilátero



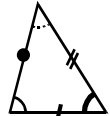
3 lados $\cong$

Isósceles



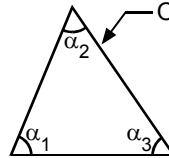
2 lados $\cong$

Escaleno



3 lados $\neq$

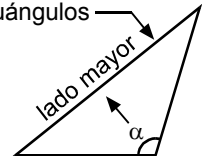
II. Por la medida de sus ángulos



Acutángulo

Es aquél que tiene sus tres ángulos internos agudos.

$$(0 < \alpha_n < 90^\circ)$$

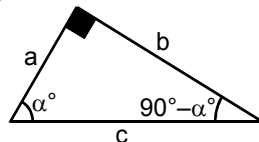


Obtusángulo

Es aquél que tiene un ángulo interno obtuso.

$$(90^\circ < \alpha < 180^\circ)$$

Rectángulo:



Es aquél que tiene un ángulo interno recto.

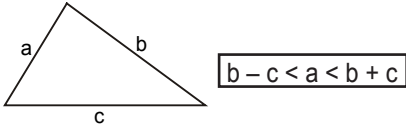
a y b: catetos

c: hipotenusa

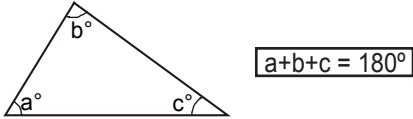
GEOMETRÍA

Propiedades básicas

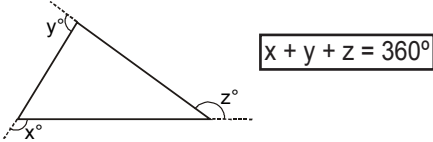
1. Existencia del triángulo



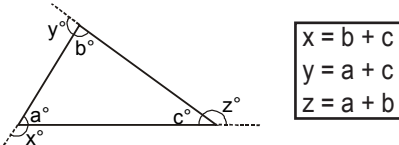
2. Suma de medidas de ángulos internos



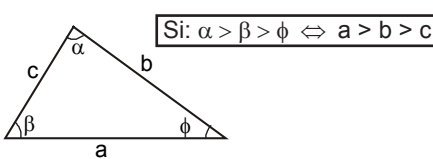
3. Suma de medidas de ángulos externos



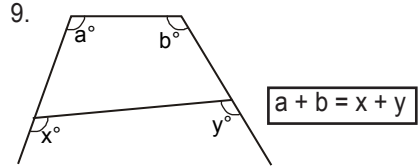
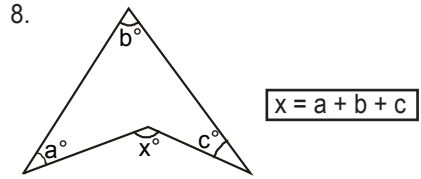
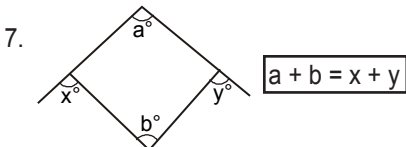
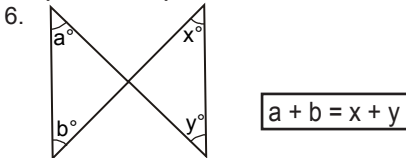
4. Medidas de un ángulo externo



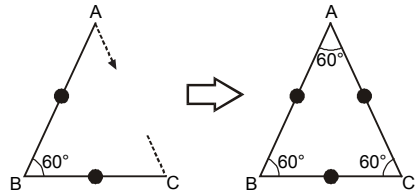
5. A mayor ángulo se opone mayor lado y viceversa.



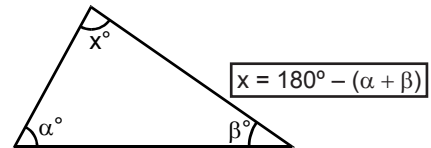
Propiedades particulares



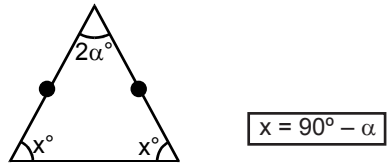
10. Si: $AB = BC \rightarrow$ El triángulo ABC es equilátero.



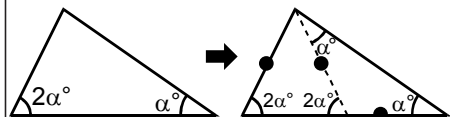
11.



12.

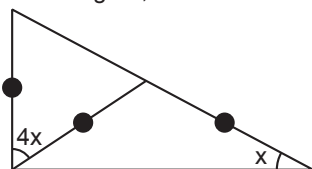


13. Si:



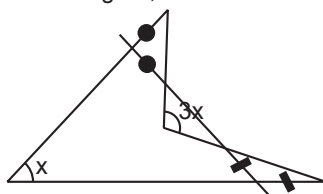
PROBLEMAS APLICATIVOS

1. En la figura, calcule "x".



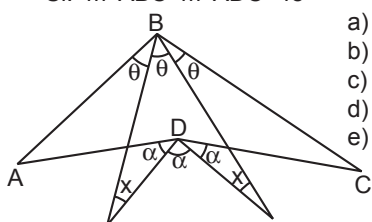
- a) 12°
- b) $22,5^\circ$
- c) 30°
- d) 15°
- e) 18°

2. En la figura, calcule "x".



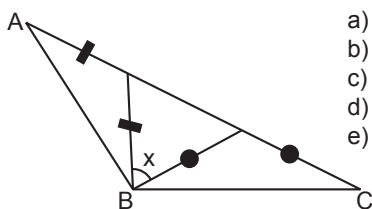
- a) 36°
- b) 18°
- c) 24°
- d) 12°
- e) 15°

3. En la figura, calcule "x".
Si: $m \angle ABC - m \angle ADC = 48^\circ$



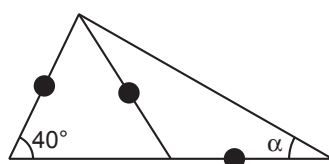
- a) 8°
- b) 10°
- c) 12°
- d) 14°
- e) 16°

4. Calcule "x". $m \angle ABC = 110^\circ$



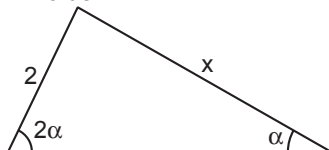
- a) 10°
- b) 40°
- c) 50°
- d) 25°
- e) 15°

5. Calcule "x".



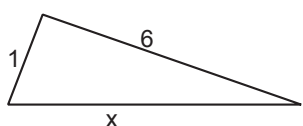
- a) 20°
- b) 10°
- c) 30°
- d) 40°
- e) 15°

6. Según la figura, calcule el valor entero de "x".



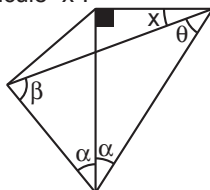
- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 4
- e) 5

7. Calcule el valor entero de "x".



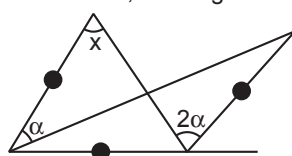
- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 5
- e) 6

8. En la figura: $b - q = 20$
Calcule "x".



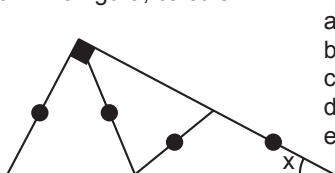
- a) 45°
- b) 30°
- c) 60°
- d) 25°
- e) 10°

9. Calcule "x", en la figura.



- a) 30°
- b) 40°
- c) 60°
- d) 70°
- e) 80°

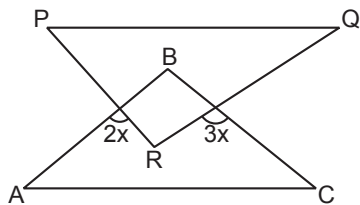
10. En la figura, calcule "x".



- a) 9
- b) 18
- c) 15
- d) 12
- e) 22,5

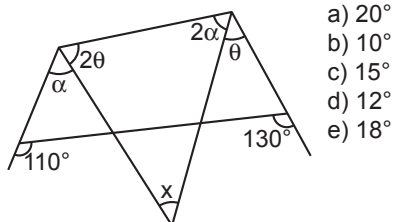
GEOMETRÍA

11. Si los triángulos ABC y PQR son equiláteros, calcule "x".



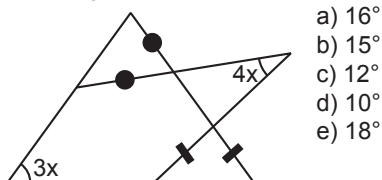
- a) 24 b) 12 c) 18
d) 15 e) 10

12. En la siguiente figura, calcule "x".



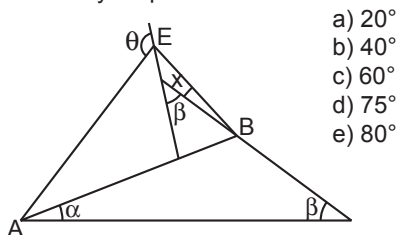
- a) 20°
b) 10°
c) 15°
d) 12°
e) 18°

13. En la figura, calcule "x".



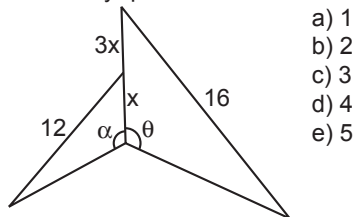
- a) 16°
b) 15°
c) 12°
d) 10°
e) 18°

14. Calcule "x", si el triángulo AEB equilátero y $a+q = 140^\circ$.



- a) 20°
b) 40°
c) 60°
d) 75°
e) 80°

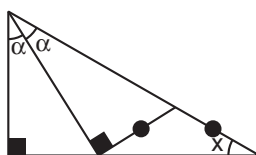
15. Calcule el máximo valor entero de "x". Si: a y q son obtusos.



- a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

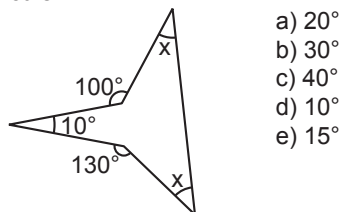
PROBLEMAS PROPUESTOS

1. En el gráfico, calcule "x".



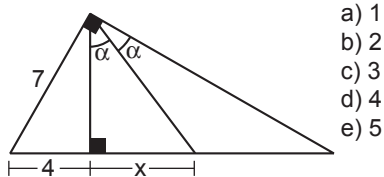
- a) 25°
b) 20°
c) 30°
d) 15°
e) 37°

2. Calcule "x".



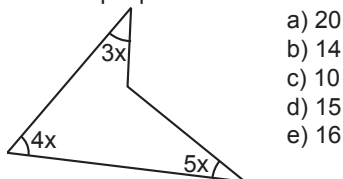
- a) 20°
b) 30°
c) 40°
d) 10°
e) 15°

3. En el gráfico, calcule "x".



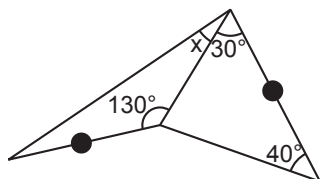
- a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

4. Según la figura, calcule el mayor valor entero que puede tomar "x".



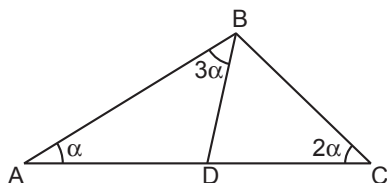
- a) 20
b) 14
c) 10
d) 15
e) 16

5. En la figura, calcule "x".



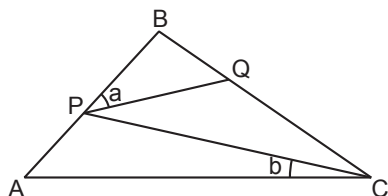
- a) 12° b) 30° c) 20°
d) 15° e) 18°

6. Calcule AD, si: $BD=5$ y $BC=7$



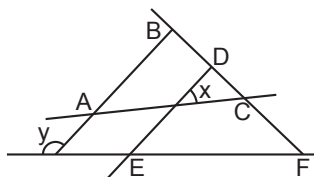
- a) 12 b) 11 c) 13
d) 14 e) 10

7. En el gráfico $AB=BC$ y el triángulo PQC es equilátero, que afirmación es correcta.



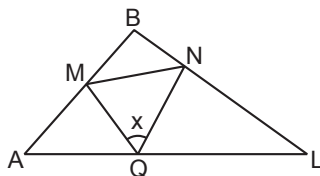
- a) $a=b$ b) $2a=b$ c) $2a=3b$
d) $a=2b$ e) $a=b+60$

8. En la figura, $AB=BC$ y $EF=DF$. Calcule x/y .



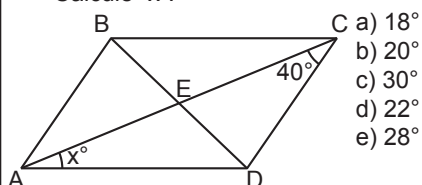
- a) 1 b) 1/2 c) 1/3
d) 3/4 e) 2/3

9. En la figura, el triángulo MBN es equilátero y $AQ=AM$ y $QL=NL$. Calcule "x".



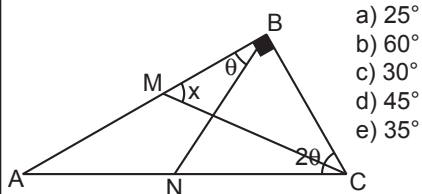
- a) 32° b) 62° c) 30°
d) 60° e) 50°

10. En la figura, $AB=BC=BD$ y $ED=DC$. Calcule "x".



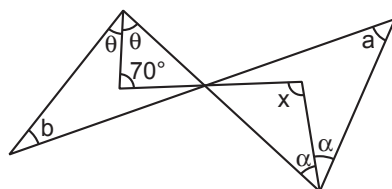
- a) 18°
b) 20°
c) 30°
d) 22°
e) 28°

11. En la figura, $AB=AM+NC$, calcule "x".



- a) 25°
b) 60°
c) 30°
d) 45°
e) 35°

12. En la figura, calcule "x". Si: $a-b=6°$



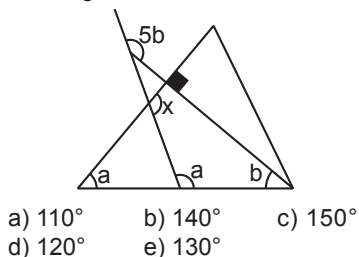
- a) 73° b) 72° c) 60°
d) 62° e) 59°

GEOMETRÍA

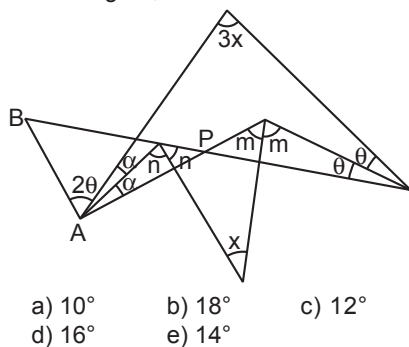
13. En su triángulo ABC, se sabe que $AC+BC=11$, exterior y relativo a $\overline{AB}$ se toma el punto "P", tal que: $PA=4$ y $PB=5$. Calcule la diferencia entre el mayor y menor valor entero que toma PC.

- a) 9 b) 6 c) 7
d) 8 e) 3

14. En la figura, calcule "x".



15. En la figura, calcule "x". Si: $AB=AP$



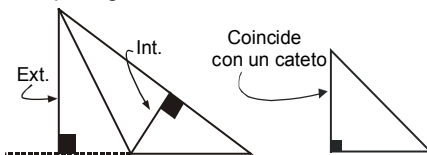
CLAVES

1.b	2.a	3.a	4.b	5.a
6.c	7.e	8.e	9.c	10.e
11.a	12.a	13.e	14.a	15.e
1.c	2.a	3.c	4.b	5.b
6.a	7.d	8.b	9.d	10.b
11.d	12.a	13.b	14.d	15.b

Triángulos II: Líneas y Puntos Notables

1. Altura

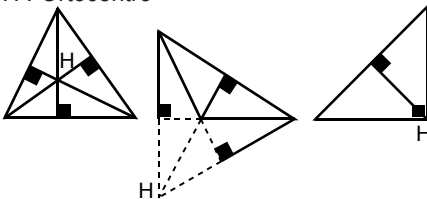
Segmento que parte de un vértice y corta en forma perpendicular al lado opuesto o a su prologación.



Ortocentro

Es el punto donde se intersectan las tres alturas de un triángulo.

H : Ortocentro



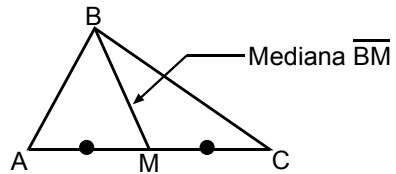
PARA RECORDAR

Todo triángulo tiene un solo ortocentro.

- Es un punto interior si el triángulo es acutángulo.
- Es un punto exterior si el triángulo es obtusángulo.
- Si es rectángulo está en el vértice del ángulo recto.

2. Mediana

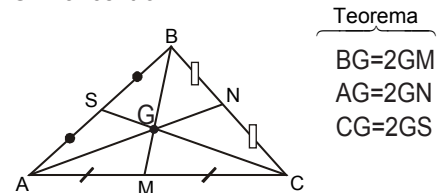
Segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto a dicho vértice.



Baricentro

Es el punto donde se intersectan las tres medianas de un triángulo.

G : Baricentro



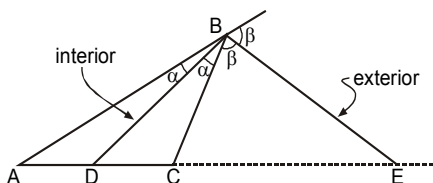
PARA RECORDAR

- Todo triángulo tiene un solo baricentro.
- Divide a cada mediana en relación como 1 es a 2.
- El baricentro es siempre un punto interior.
- Es llamado también gravicentro o centro de gravedad de la región triangular.

GEOMETRÍA

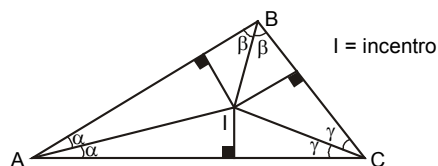
3. Bisectriz

Segmento que divide a un ángulo interior o exterior en dos ángulos de igual medida.



Incentro

Es el punto donde se intersectan las tres bisectrices interiores de un triángulo.

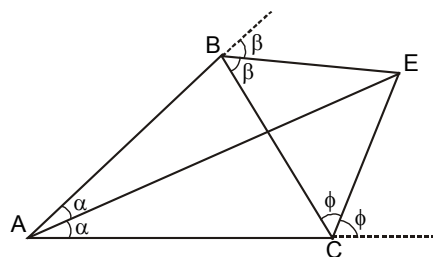


PARA RECORDAR

- Todo triángulo tiene un solo incentro.
- El incentro equidista de los lados del triángulo.
- El incentro es siempre un punto interior al triángulo.

Excentro

Es el punto donde se intersectan dos bisectrices exteriores con una bisectriz interior en un triángulo.



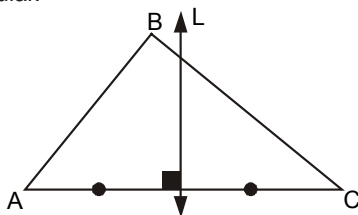
E : Excentro relativo a $\overline{BC}$

PARA RECORDAR

- Todo triángulo tiene tres excentros.
- Los excentros son siempre puntos exteriores al triángulo.

4. Mediatriz

Es una recta que pasa por el punto medio de un lado cortándolo en forma perpendicular.



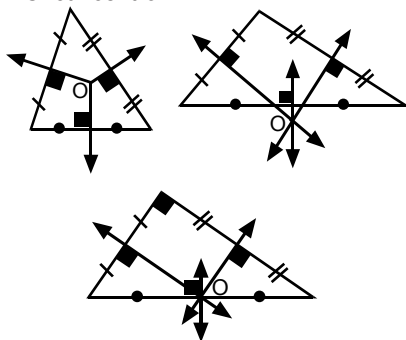
↔

L : Mediatriz de $\overline{AC}$

Circuncentro

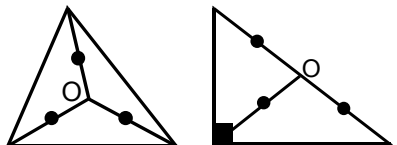
Es el punto donde se cortan las tres mediatrices de un triángulo.

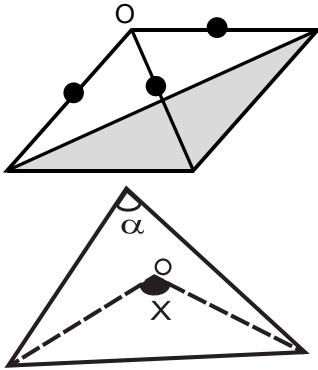
C: Circuncentro



PARA RECORDAR

- Todo triángulo tiene un solo circuncentro.
- El circuncentro equidista de los vértices del triángulo.
- Es un punto interior si el triángulo es acutángulo.
- Es un punto exterior si el triángulo es obtusángulo.
- Si es rectángulo está en el punto medio de la hipotenusa.





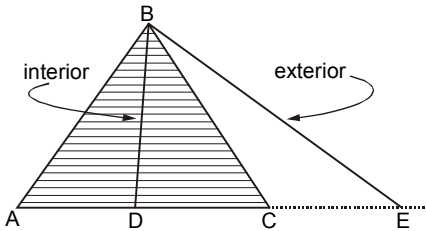
Propiedad

Si: "O" es circuncentro

$$\Rightarrow x = 2\alpha$$

5. Ceviana

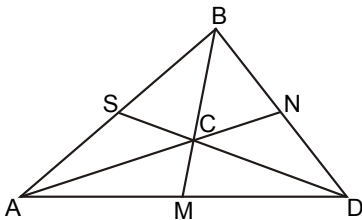
Segmento que une un vértice con un punto cualquiera del lado opuesto o de su prolongación.



Cevacento

Es el punto donde se intersectan tres cevianas de un triángulo.

C: Cevacento o punto ceviano



PARA RECORDAR

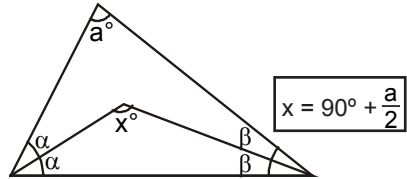
Todo triángulo tiene infinitos cevacentros.

Observaciones

- Para ubicar un punto notable sólo es necesario trazar dos líneas notables de la misma especie.
- En todos los triángulos isósceles, si se traza una de las cuatro primeras líneas notables hacia la base, dicha línea cumple las mismas funciones que las otras.
- En todo triángulo equilátero el ortocentro, baricentro, incentro y circuncentro coinciden.
- En todo triángulo isósceles, el ortocentro, baricentro, incentro y el excentro relativo a la base, se encuentran alineados en la mediatriz de la base.

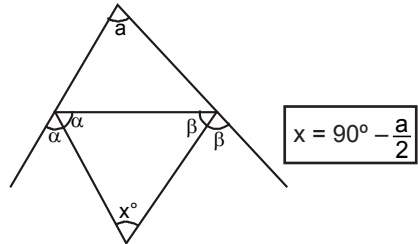
Propiedades con líneas notables

- Ángulo formado por dos bisectrices interiores.



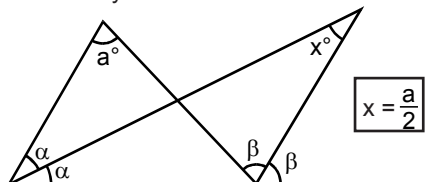
$$x = 90^\circ + \frac{a}{2}$$

- Ángulo formado por dos bisectrices exteriores



$$x = 90^\circ - \frac{a}{2}$$

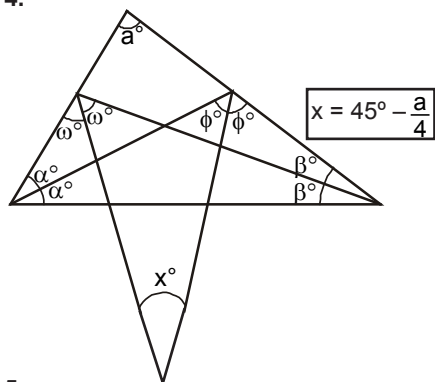
- Ángulo formado por una bisectriz interior y una bisectriz exterior.



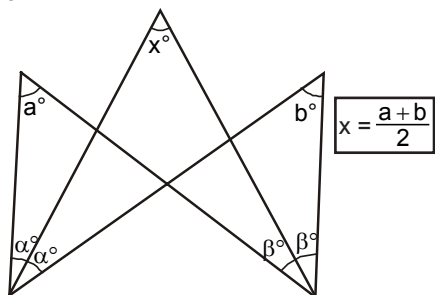
$$x = \frac{a}{2}$$

GEOMETRÍA

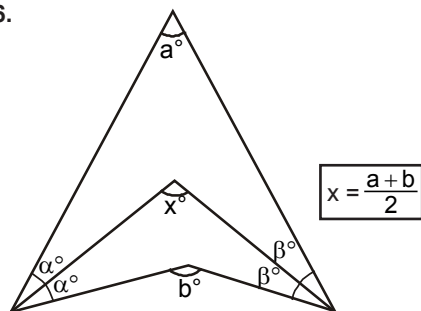
4.



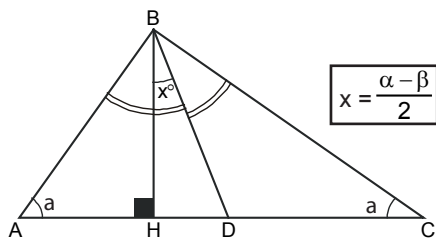
5.



6.

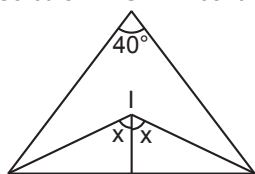


7. Ángulo formado por una altura y una bisectriz interior.



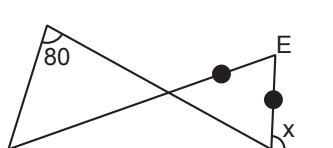
PROBLEMAS APLICATIVOS

1. Calcule "x". Si: I: Incentro



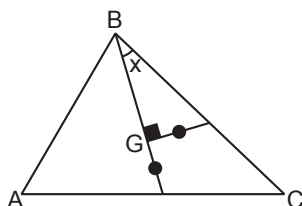
- a) 45°
- b) 35°
- c) 75°
- d) 65°
- e) 55°

2. Calcule "x". Si: E: Excentro



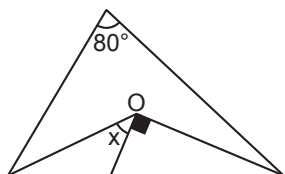
- a) 60°
- b) 50°
- c) 70°
- d) 40°
- e) 55°

3. Calcule "x", si G es baricentro.



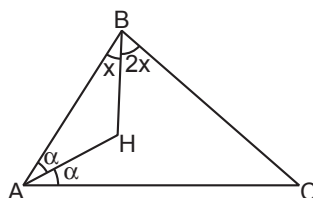
- a) 30°
- b) 60°
- c) 53°
- d) 45°
- e) $\frac{53}{2}$

4. Calcule "x". Si: O es circuncentro del triángulo.



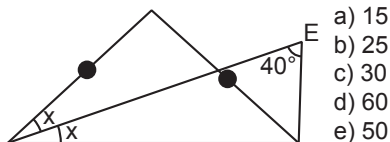
- a) 30°
- b) 70°
- c) 60°
- d) 50°
- e) 80°

5. Calcule "x". Si: H es ortocentro.



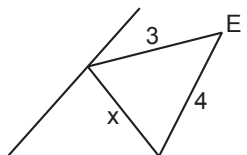
- a) 8°
- b) 9°
- c) 15°
- d) 12°
- e) 18°

6. Calcule "x". Si: E: Excentro



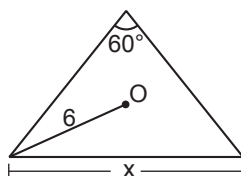
- a) 15
- b) 25
- c) 30
- d) 60
- e) 50

7. Calcule del mayor valor entero de "x". Si: E: Excentro



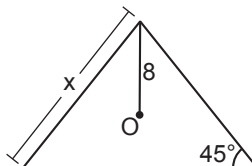
- a) 3
- b) 4
- c) 5
- d) 6
- e) 2

8. Calcule "x". Si O es circuncentro.



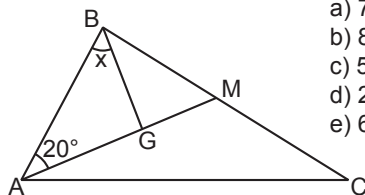
- a) 12
- b) $6\sqrt{2}$
- c) $6\sqrt{3}$
- d) 18
- e) 24

9. Calcule "x". Si O es circuncentro.



- a) 12
- b) $6\sqrt{2}$
- c) $8\sqrt{2}$
- d) 16
- e) 24

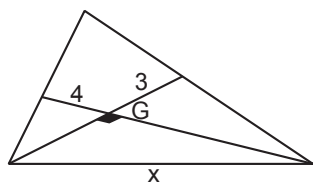
10. Calcule "x". Si: G es baricentro.
 $AB=2GM$



- a) 70°
- b) 80°
- c) 50°
- d) 20°
- e) 60°

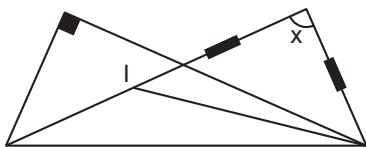
GEOMETRÍA

11. En la siguiente figura, calcule "x". Si: G es baricentro.



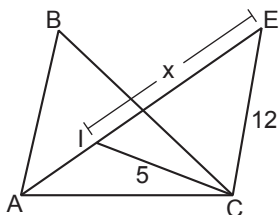
- a) 6 b) 8 c) 10
d) 12 e) 15

12. Calcule "x", si I es incentro.



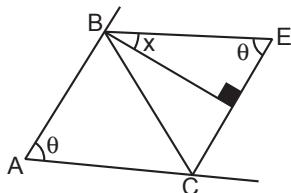
- a) 25° b) 36° c) 72°
d) 45° e) 90°

13. Calcule "x". Si I es incentro y E es excentro del $\triangle ABC$.



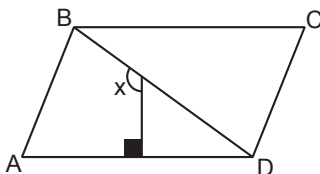
- a) 8 b) 12 c) 13
d) 20 e) 15

14. Calcule "x", si E es excentro del $\triangle ABC$.



- a) 45° b) 15° c) 20°
d) 30° e) 40°

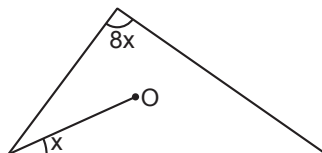
15. ABCD es un romboide. Calcule "x", si C es excentro de $\triangle ABD$.



- a) 130° b) 140° c) 160°
d) 120° e) 150°

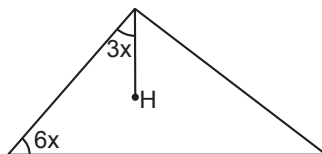
PROBLEMAS PROPUESTOS

1. En la figura, calcule "x". Si: O es circuncentro.



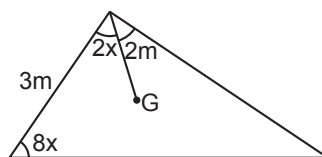
- a) 10° b) 12° c) 15°
d) 8° e) 9°

2. En la figura, calcule "x". Si: H es ortocentro.



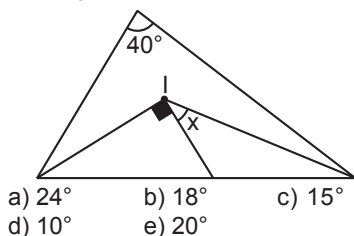
- a) 15 b) 12 c) 8
d) 9 e) 10

3. En la figura, calcule "x". Si: G es baricentro.

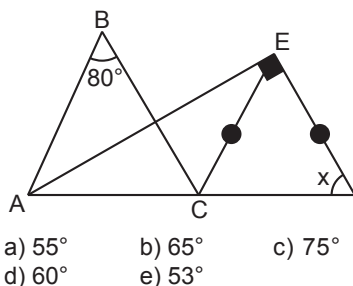


- a) 9 b) 15 c) 12
d) 10 e) 18

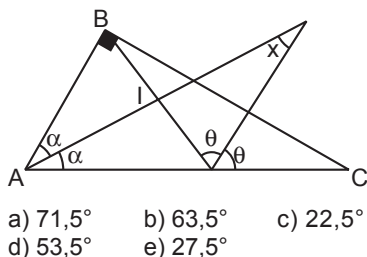
4. En la figura, calcule "x". Si: I es incentro.



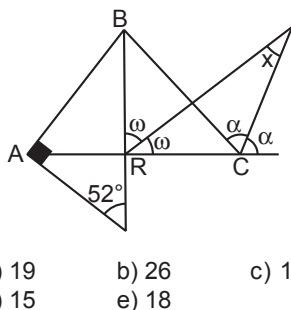
5. En la figura, calcule "x". Si: E es excentro del $\triangle ABC$.



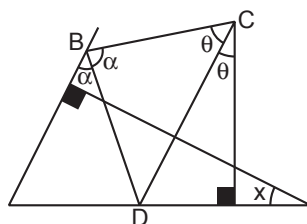
6. Calcule "x". Si: I es incentro del $\triangle ABC$.



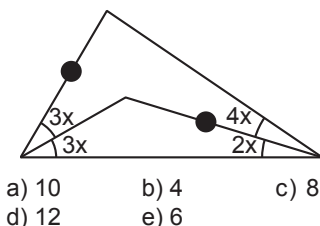
7. En la figura, calcule "x". Si $\overleftrightarrow{BR}$ es bisectriz del ángulo ABC.



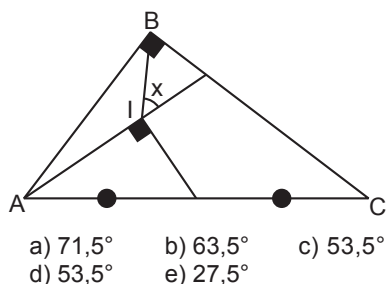
8. En la figura, calcule "x". Si: $m \angle BDC = 70^\circ$



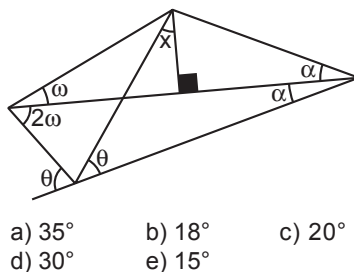
9. En la figura, calcule "x".



10. En la figura, calcule "x". Si: I es incentro del $\triangle ABC$.

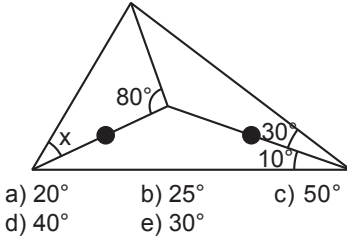


11. En la siguiente figura, calcule "x".

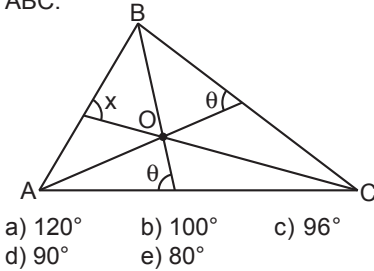


GEOMETRÍA

12. En la siguiente figura, calcule "x".



13. En la siguiente figura, calcule "x".
Si: "O" es circuncentro del triángulo ABC.



14. En un triángulo ABC, donde $m \angle A = 78^\circ$ y $m \angle B = 24^\circ$. Si: O es circuncentro e I es incentro. Calcule la $m \angle OAI$.

- a) 27° b) 14° c) 23°
d) 32° e) 37°

15. En un triángulo ABC, $AB = BC$, $m \angle B = 44^\circ$.

I : incentro

H : Ortocentro

Calcule la $m \angle IAH$.

- a) 4° b) 6° c) 8°
d) 10° e) 12°

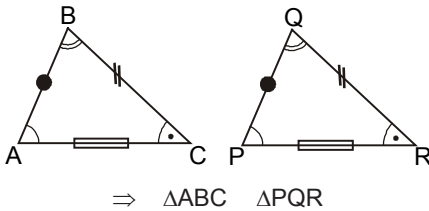
CLAVES

1.e	2.c	3.e	4.b	5.e
6.b	7.b	8.c	9.c	10.b
11.c	12.e	13.c	14.d	15.e
1.a	2.e	3.d	4.e	5.b
6.c	7.a	8.c	9.e	10.a
11.d	12.c	13.d	14.a	15.e

Congruencia de Triángulos

Definición

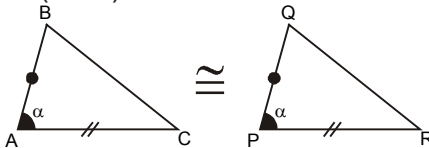
Dos triángulos son congruentes, si tienen sus tres lados congruentes y sus tres ángulos congruentes respectivamente.



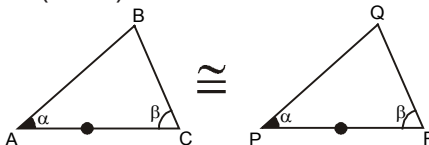
Nota.- En un problema dado se podrá afirmar que dos triángulos son congruentes, si tienen como mínimo tres elementos iguales, de los cuales uno de ellos debe ser un lado.

Postulados de congruencia en triángulos

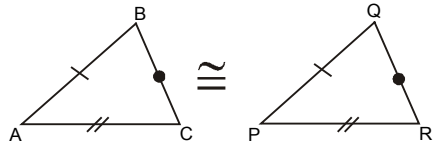
I. (L.A.L.)



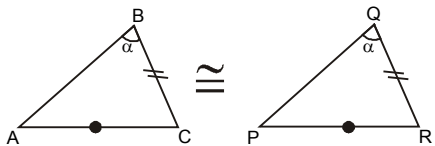
II. (A.L.A.)



III. (L.L.L.)



IV. (L.L.A.m.)

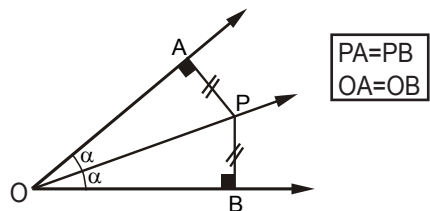


α : Opuesto al mayor lado

Propiedades en congruencia de triángulos

1. De la bisectriz

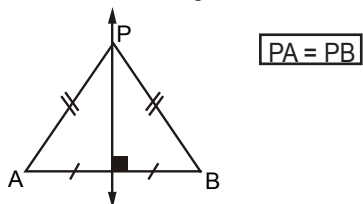
Todo punto situado en la bisectriz, siempre equidista de los lados del ángulo.



GEOMETRÍA

2. De la mediatriz

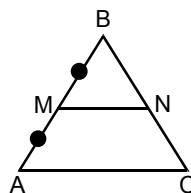
Todo punto situado en la mediatriz de un segmento, siempre equidista de los extremos de dicho segmento.



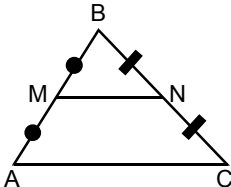
3. De la base media de un triángulo

El segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo, es paralelo al tercer lado y mide la mitad de lo que mide el tercer lado.

Si: $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$

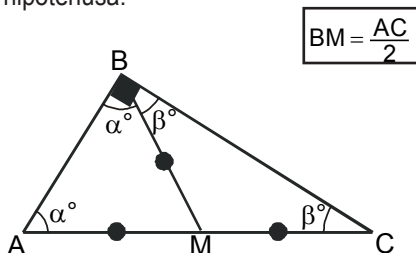


Si: M y N son puntos medios



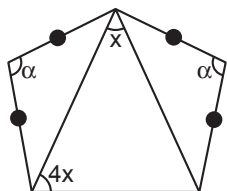
4. De la mediana relativa a la Hipotenusa

La mediana relativa a la hipotenusa, siempre mide la mitad de lo que mide la hipotenusa.



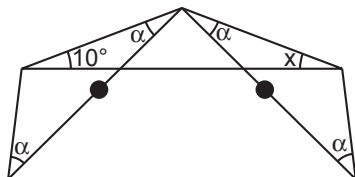
PROBLEMAS APLICATIVOS

1. En la figura, calcule "x".



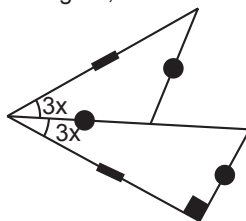
- a) 15°
- b) 18°
- c) 10°
- d) 20°
- e) 12°

2. En la figura, calcule "x".



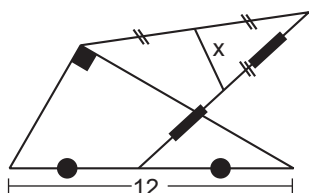
- a) 9°
- b) 18°
- c) 12°
- d) 15°
- e) 10°

3. En la figura, calcule "x".



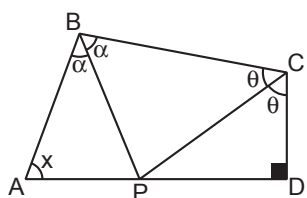
- a) 8
- b) 15
- c) 12
- d) 10
- e) 9

4. En la figura, calcule "x".



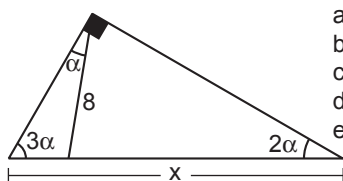
- a) 5
- b) 4
- c) 1
- d) 2
- e) 3

5. En la figura calcule "x", si: $AP=2PD$



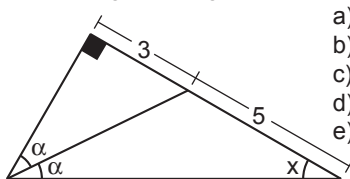
- a) 10°
- b) 20°
- c) 30°
- d) 50°
- e) 60°

6. En la siguiente figura, calcule "x".



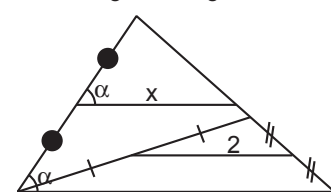
- a) 24
- b) 12
- c) 4
- d) 8
- e) 16

7. En la siguiente figura, calcule "x".



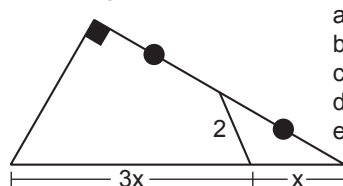
- a) 18,5°
- b) 37°
- c) 26,5°
- d) 53°
- e) 30°

8. En la siguiente figura, calcule "x".



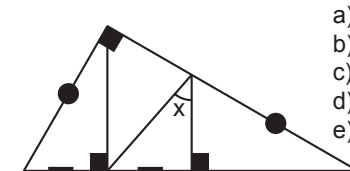
- a) 2
- b) 4
- c) 3
- d) 5
- e) 6

9. En la figura, calcule "x".



- a) 2
- b) 3
- c) 4
- d) 1
- e) 6

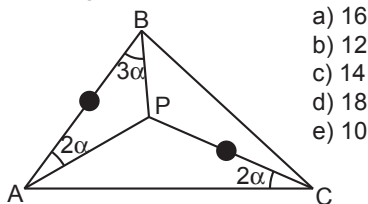
10. En la figura, calcule "x".



- a) 28°
- b) 30°
- c) 32°
- d) 38°
- e) 45°

GEOMETRÍA

11. En la figura, calcule AC. Si: $AP=8$

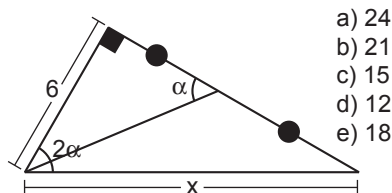


- a) 16
- b) 12
- c) 14
- d) 18
- e) 10

12. En un triángulo ABC ($AB=BC$) trazamos la bisectriz interior $\overline{AD}$. En el triángulo ADC trazamos las bisectrices interior $\overline{DE}$ y exterior $\overline{DF}$. Calcule EF. ($AD=6$)

- a) 9
- b) 12
- c) 15
- d) 18
- e) 24

13. Calcule "x".

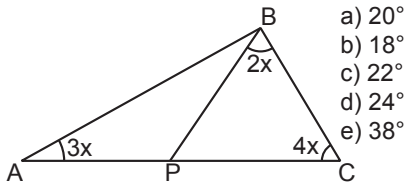


- a) 24
- b) 21
- c) 15
- d) 12
- e) 18

14. Se tienen los triángulos equiláteros ABC y BMN, tal que M, C y N sean colineales (N exterior y relativo a BC). Si: $BM=6$ y $AB=5$. Calcule el perímetro de la región triangular AMC.

- a) 9
- b) 11
- c) 10
- d) 13
- e) 12

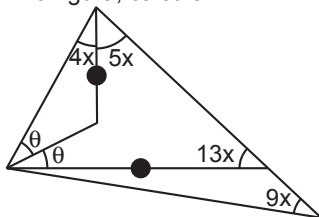
15. Calcule "x". Si: $AC=BP$



- a) 20°
- b) 18°
- c) 22°
- d) 24°
- e) 38°

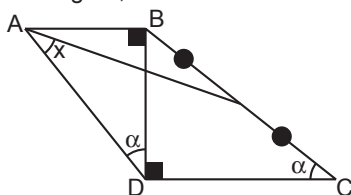
PROBLEMAS PROPUESTOS

1. En la figura, calcule " $2x$ ".



- a) 9
- b) 8
- c) 12
- d) 6
- e) 4

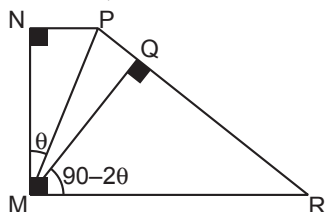
2. En la figura, calcule "x". Si: $BC=2AD$



- a) 53°
- b) 45°
- c) 30°
- d) 37°
- e) 60°

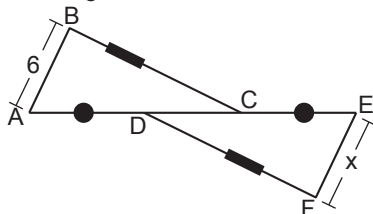
3. En la figura, calcule "NP".

Si: $MR-RQ=10$



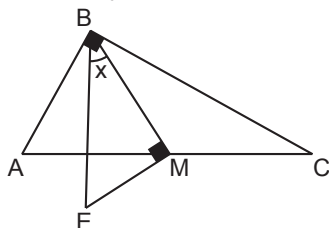
- a) 10
- b) 8
- c) 12
- d) 6
- e) 14

4. En la figura, calcule "x". Si: $BC \parallel DF$



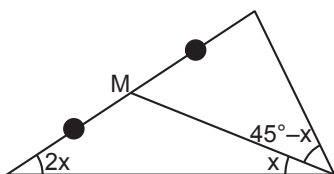
- a) 8
- b) 3
- c) 4
- d) 6
- e) 5

5. Si: $AM=MC$ y $AC=BE$. Calcule "x".



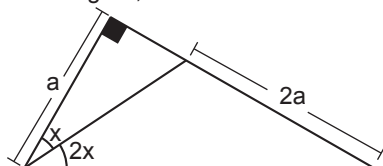
- a) 45° b) 37° c) 53°
d) 30° e) 60°

6. En la figura, calcule "x".



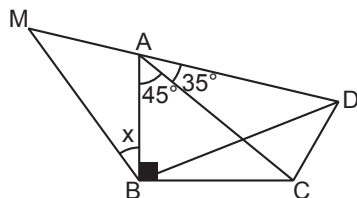
- a) 9° b) 18° c) 12°
d) 30° e) 15°

7. En la figura, calcule "x".



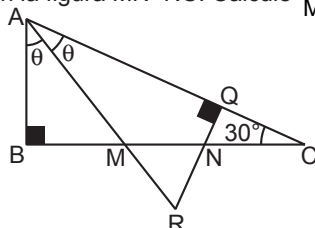
- a) 12° b) 18° c) 30°
d) $22,5^\circ$ e) 15°

8. En la figura $BM=BD$ y $CD=AM$. Calcule "x".



- a) 25° b) 35° c) 15°
d) 30° e) 37°

9. En la figura $MN=NC$. Calcule $\frac{BM}{MR}$



- a) 1 b) 2 c) 3
d) $1/2$ e) $1/3$

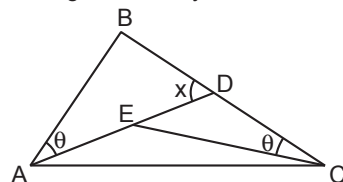
10. En un triángulo ABC, las mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se intersectan en "O", tal que $8(BO)=5(AC)$. Calcule la m ABC.

- a) 53° b) 37° c) 60°
d) 30° e) 45°

11. En un triángulo ABC, la mediana $\overline{AM}$ y la altura $\overline{BH}$ se intersectan en "N", tal que $AN=MN$; $BC=10$; $AH=4$. Calcule "HN".

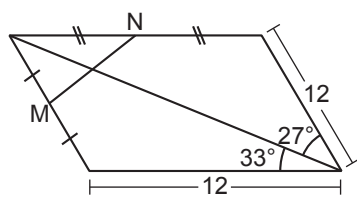
- a) 1 b) 1,5 c) 2
d) 2,5 e) $1/2$

12. En la figura, $AB=EC$ y $CD=AE$. Calcule "x".



- a) 30° b) 40° c) 50°
d) 80° e) 60°

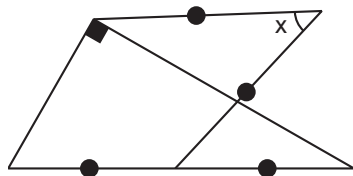
13. En la figura, calcule MN.



- a) 10 b) 8 c) 12
d) 6 e) 4

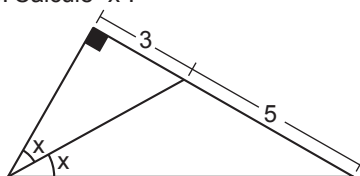
GEOMETRÍA

14. En la figura, calcule "x".



- a) 60° b) 70° c) 50°
d) 65° e) 30°

15. Calcule "x".



- a) 30° b) 15° c) $\frac{45^\circ}{2}$
d) $\frac{37^\circ}{2}$ e) $\frac{53^\circ}{2}$

CLAVES

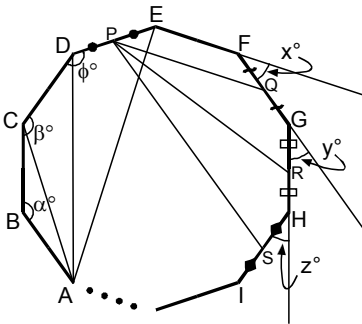
1.d	2.e	3.d	4.e	5.c
6.e	7.b	8.a	9.a	10.e
11.a	12.b	13.e	14.b	15.b
1.a	2.b	3.a	4.d	5.e
6.e	7.d	8.b	9.a	10.a
11.b	12.e	13.d	14.a	15.e

Polígonos y Cuadriláteros

Polígono

Definición

Es la reunión de tres o más segmentos consecutivos y coplanares, tal que el extremo del primero coincida con el extremo del último; ningún par de segmentos se intercepten, excepto en sus extremos, y dos segmentos consecutivos no son colineales.

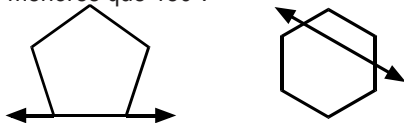


Elementos

Vértices : $A, B, C, D, \dots$
 Lados : $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \dots$
 m internos : $\alpha, \beta, \phi, \dots$
 m externos : $x, y, z, \dots$
 Diagonales : $\overline{AC}, \overline{AD}, \overline{AE}, \dots$
 Diagonales medias : $\overline{PQ}, \overline{PR}, \overline{PS}, \dots$

Polígono convexo

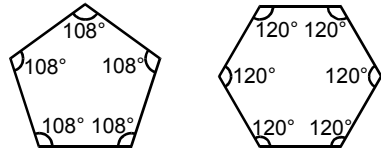
Es cuando tienen todos sus ángulos internos convexos, es decir mayores que cero y menores que 180° .



Clasificación de los polígonos convexos

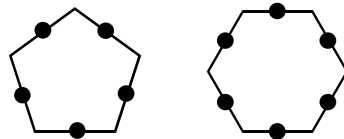
1. Polígono equiángulo

Cuando tienen todos sus ángulos internos congruentes.



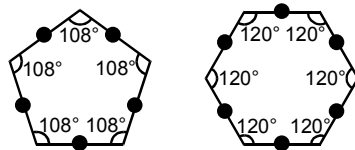
2. Polígono equilátero

Cuando tienen todos sus lados congruentes.



3. Polígono regular

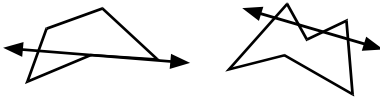
Cuando tienen todos sus ángulos internos congruentes, y todos sus lados congruentes.



GEOMETRÍA

Polígono no convexo

Cuando tienen uno o más ángulos internos no convexos, es decir mayores que 180° y menores que 360° .



Denominación de los polígonos

Triángulo	3 lados
Cuadrilátero	4 lados
Pentágono	5 lados
Hexágono	6 lados
Heptágono	7 lados
Octógono	8 lados
Nonágono o Eneágono	9 lados
Decágono	10 lados
Endecágono	11 lados
Dodecágono	12 lados
Pentadecágono	15 lados
Icoságono	20 lados
Enégon	n lados

Propiedades para todo polígono convexo

Si "n" es el número de lados de un polígono convexo, se cumple que:

1. Suma de las medidas de sus ángulos internos:

$$S_{m_i} = 180^\circ (n - 2)$$

2. Suma de las medidas de sus ángulos externos:

$$S_{m_e} = 360^\circ$$

3. Diagonales trazadas desde un sólo vértice:

$$D_1 = (n - 3)$$

4. Número total de diagonales:

$$D_T = \frac{n(n-3)}{2}$$

5. Número total de diagonales medias:

$$D_m = \frac{n(n-1)}{2}$$

6. Diagonales trazadas desde "v" vértices consecutivos:

$$D_v = vn - \frac{(v+1)(v+2)}{2}$$

En polígonos regulares y equiángulos

7. Medida de un ángulo interno:

$$m_i = \frac{180(n-2)}{n}$$

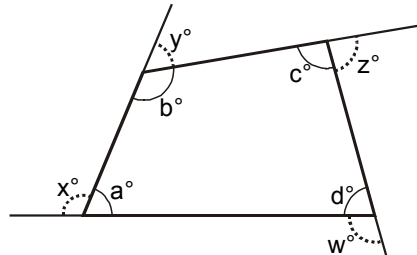
8. Medida de un ángulo exterior:

$$m_e = \frac{360}{n}$$

Cuadrilátero

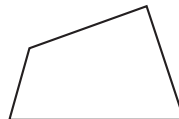
Definición

Es un polígono de 4 lados.

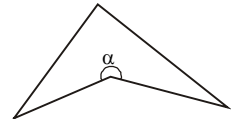


$$x + y + z + w = a + b + c + d = 360^\circ$$

Clasificación general



Convexos



No convexos

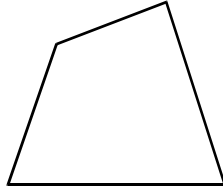
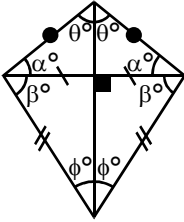
Clasificación de los cuadriláteros convexos

1. Trapezoide

Aquéllos que no tienen lados opuestos paralelos.

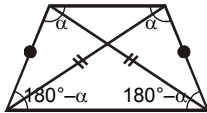
SIMÉTRICO

ASIMÉTRICO

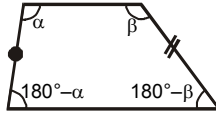


2. Trapecios

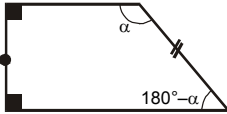
Tienen dos lados opuestos paralelos llamados bases, y los otros lados llamados lados no paralelos.



Trapezio isósceles



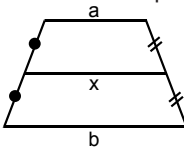
Trapezio escaleno



Trapezio rectángulo

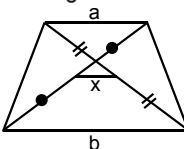
PROPIEDADES DEL TRAPECIO

- Mediana de un trapezio



$$x = \frac{a+b}{2}$$

- Segmento que une los puntos medios de las diagonales.



$$x = \frac{b-a}{2}$$

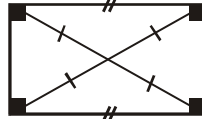
3. Paralelogramos

Aquéllos de lados opuestos paralelos y congruentes ángulos opuestos de igual medida y dos ángulos consecutivos siempre suplementarios. Sus diagonales se bisecan.

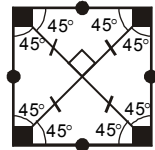
Romboide



Rombo



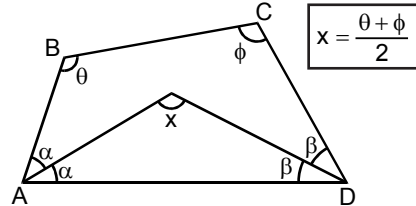
Rectángulo



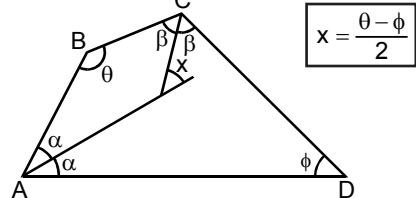
Cuadrado

Propiedades generales

1.

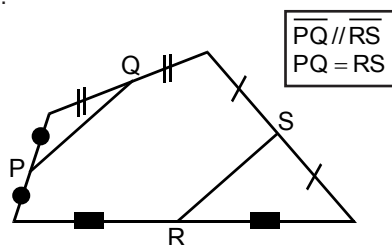


2.

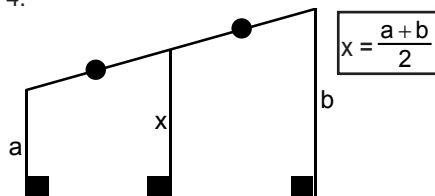


GEOMETRÍA

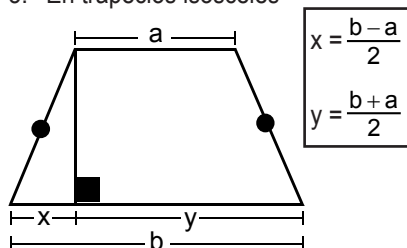
3.



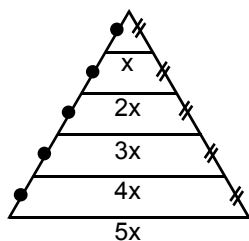
4.



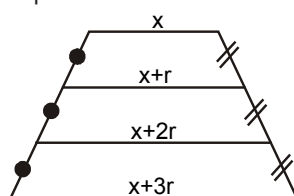
5. En trapezios isósceles



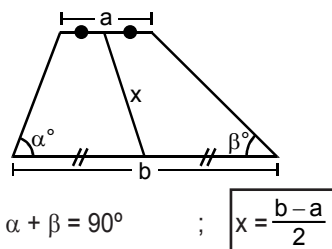
6. En triángulos



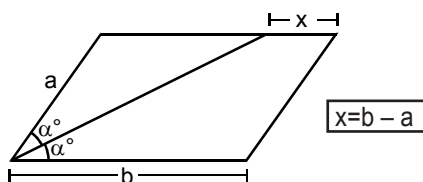
7. En trapezios



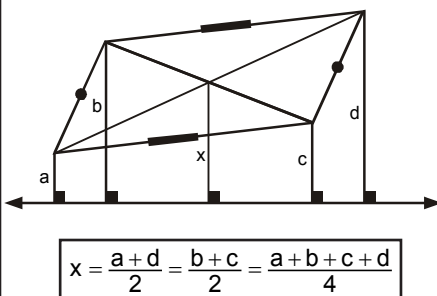
8. Segmento que une los puntos medios de las bases de un trapezio.



9. En paralelogramos.



10. En paralelogramos.



PROBLEMAS APLICATIVOS

1. ¿Cuántos lados tiene aquel polígono cuyo número total de diagonales es igual al número de lados?

a) 7 b) 4 c) 5
d) 8 e) 12

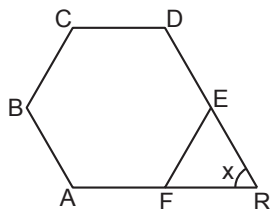
2. ¿Cuántos lados tiene aquel polígono cuyo número total de diagonales es el doble del número de lados?

a) 12 b) 8 c) 6
d) 7 e) 15

3. Cuántos lados tiene aquel polígono, si se triplica el número de lados, la suma de sus ángulos internos se quintuplica.

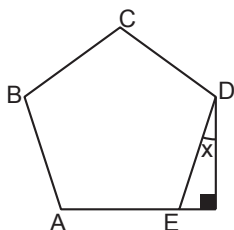
a) 4 b) 8 c) 12
d) 10 e) 15

4. En el hexágono regular ABCDEF, calcule "x".



a) 75°
b) 45°
c) 30°
d) 60°
e) 37°

5. En el pentágono regular ABCDE, calcule "x".



a) 15°
b) 12°
c) 14°
d) 36°
e) 18°

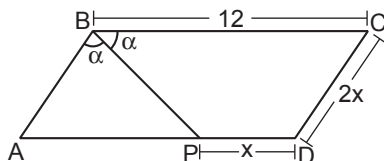
6. En un polígono convexo el número de diagonales medias y el número de diagonales trazados de un sólo vértice suman 18. ¿Cuántos lados tiene?.

a) 6 b) 4 c) 8
d) 9 e) 12

7. En un romboide ABCD, se traza $\overline{BP}$ y $\overline{DQ}$ perpendiculares a $\overline{AC}$, tal que: $AB=PQ$ y $m \angle ABP=53^\circ$. Calcule la $m \angle PCB$.

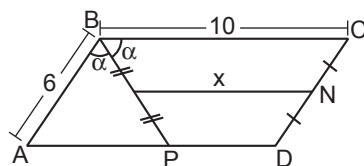
a) $\frac{37}{2}$ b) $\frac{53}{2}$ c) $\frac{45}{2}$
d) 8 e) $\frac{15}{2}$

8. En el romboide ABCD, calcule "x".



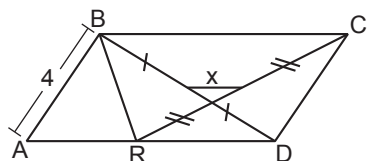
a) 4 b) 3 c) 2
d) 5 e) 6

9. En el romboide ABCD, calcule "x".



a) 5 b) 8 c) 6
d) 7 e) 4

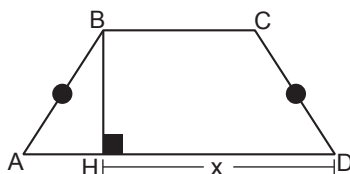
10. En el romboide ABCD, calcule "x". ($\overline{BR}$ = Bisectriz de la $m \angle ABC$)



a) 3 b) 4 c) 1
d) 2 e) 5

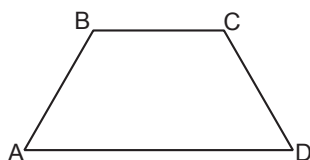
GEOMETRÍA

11. En el trapecio ABCD. Calcule "x", si: $BC+AD=12$



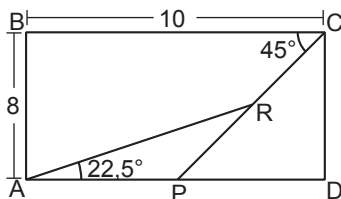
- a) 5 b) 4 c) 6
d) 2 e) 3

12. En el trapecio ABCD, calcule el máximo valor entero de CD. Si: $AB=6$; $BC=4$ y $AD=11$.



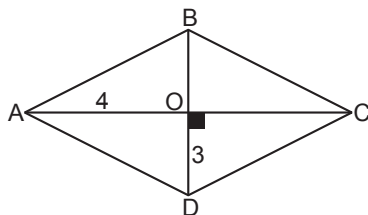
- a) 12
b) 10
c) 8
d) 9
e) 11

13. En el rectángulo ABCD. Calcule PR.



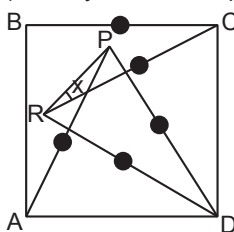
- a) 1 b) 3 c) 4
d) 5 e) 2

14. En el rombo ABCD, calcule su perímetro.



- a) 20 b) 25 c) 30
d) 28 e) 34

15. En el cuadrado ABCD, calcule "x". (DAPD y CRD son equiláteros)



- a) 18°
b) 12°
c) 8°
d) 9°
e) 15°

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. ¿Cuántas diagonales tiene el polígono regular cuyos ángulos internos miden 120° ?

- a) 6 b) 9 c) 12
d) 27 e) 54

2. ¿Cuántos lados tiene el polígono regular, si al disminuir en 3 el número de lados, la medida de su ángulo central aumenta en 6° ?

- a) 20 b) 15 c) 12
d) 13 e) 18

3. Si en un polígono regular la medida de un ángulo interior se le disminuye en 9° , el número de lados disminuye en 2. ¿Cuántas diagonales quedan?

- a) 20 b) 10 c) 30
d) 25 e) 32

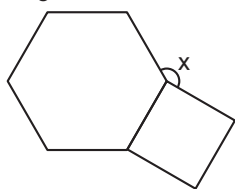
4. Los números de diagonales de dos polígonos regulares se diferencian en 36 y las medidas de sus ángulos centrales están en relación de 4 a 5. Calcular la diferencia entre el número de lados.

- a) 6 b) 4 c) 3
d) 2 e) 7

5. Al triplicar el número de lados de un polígono, la medida de su ángulo interior aumenta en 40° . Calcular el número de diagonales del polígono menor.

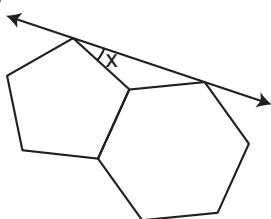
- a) 20 b) 54 c) 27
d) 12 e) 9

6. En la figura, calcule "x" si los polígono son regulares.



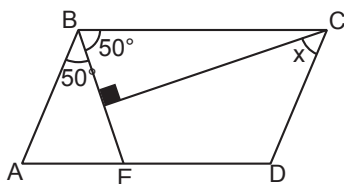
- a) 130 b) 120 c) 150
d) 110 e) 140

7. Si los polígono son regulares, calcule "x".



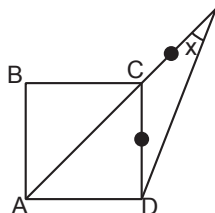
- a) 48 b) 24 c) 32
d) 16 e) 18

8. En el romboide ABCD, calcule "x".



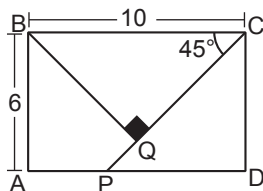
- a) 15 b) 20 c) 30
d) 10 e) 40

9. En el cuadrado ABCD, calcule "x".



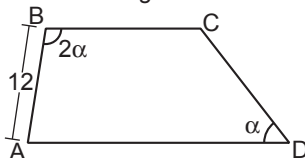
- a) 22,5 b) 15 c) 12
d) 30 e) 18

10. En el rectángulo ABCD, calcule PQ.



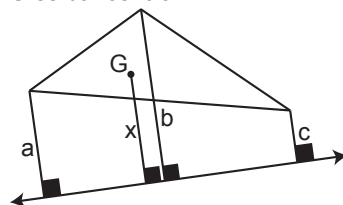
- a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{3}$ c) $\sqrt{5}$
d) $\sqrt{7}$ e) $2\sqrt{2}$

11. En el trapecio ABCD, calcule el segmento formado por los puntos medios de las diagonales.



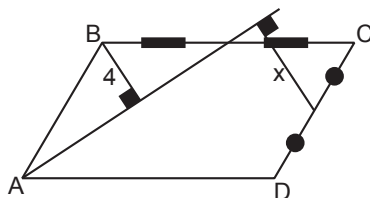
- a) 6 b) 4 c) 3
d) 2 e) 1

12. En la figura, calcule "x". Si: $a+b+c=30$; G es baricentro.



- a) 24 b) 18 c) 15
d) 10 e) 12

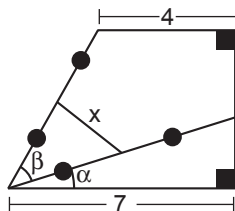
13. En el romboide ABCD, calcule "x".



- a) 2 b) 4 c) 8
d) 12 e) 6

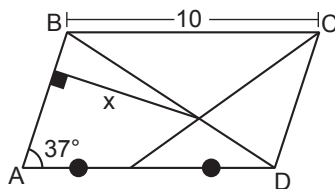
GEOMETRÍA

14. Del gráfico, calcule "x". Si: $2a+b=90^\circ$



- a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt{3}$ c) $3\sqrt{3}$
 d) $2\sqrt{2}$ e) $\sqrt{2}$

15. En el romboide ABCD, calcule "x".



- a) 3 b) 4 c) 5
 d) 6 e) 8

CLAVES				
1.c	2.d	3.a	4.d	5.e
6.a	7.a	8.a	9.d	10.d
11.c	12.a	13.e	14.a	15.e
1.b	2.b	3.a	4.c	5.e
6.c	7.b	8.e	9.a	10.a
11.a	12.d	13.e	14.d	15.b

Circunferencia I: Propiedades de Tangencia

Circunferencia

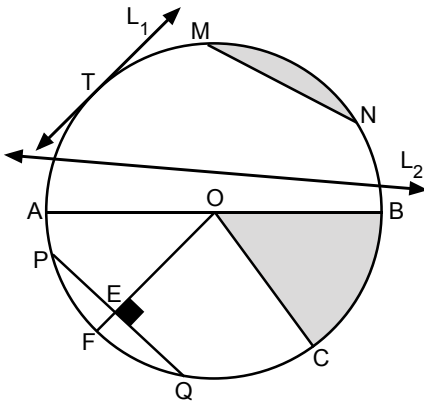
Definición

Es un conjunto infinito de puntos de un plano, que equidistan de otro punto fijo del mismo plano llamado centro.

Círculo

Es la reunión de una circunferencia y su región interior.

Del gráfico observamos



- | | |
|-----------------------|--------------------|
| 1. Centro | : "O" |
| 2. Radio | : $\overline{OA}$ |
| 3. Diámetro | : $\overline{AB}$ |
| 4. Cuerda | : $\overline{PQ}$ |
| 5. Arco | : $\widehat{BC}$ |
| 6. Flecha o sagita | : $\overline{EF}$ |
| 7. Recta tangente | : $\overline{L_1}$ |
| 8. Recta secante | : $\overline{L_2}$ |
| 9. Punto de tangencia | : "T" |
| 10. Sector circular | : $\triangle BOC$ |
| 11. Segmento circular | : $\widehat{MN}$ |

RADIO

Segmento que une el centro de la circunferencia con cualquiera de sus puntos.

CUERDA

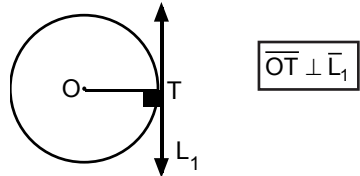
Segmento que une dos puntos cualesquiera de la circunferencia.

DIÁMETRO O CUERDA MÁXIMA

Es una cuerda que pasa por el centro de la circunferencia.

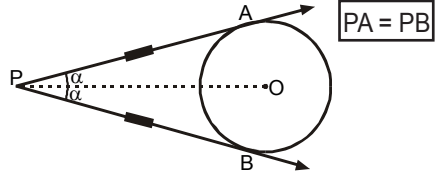
Propiedades

1. Si "T" es punto de tangencia, entonces:



$$\overline{OT} \perp \overline{L_1}$$

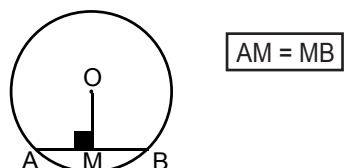
2. Si A y B son puntos de tangencia, entonces:



$$PA = PB$$

También: si "O" es centro.
PO es bisectriz de $\angle APB$

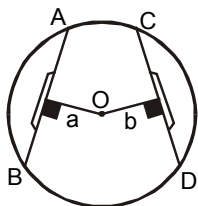
3. Si $\overline{OM} \perp \overline{AB}$ entonces:



$$AM = MB$$

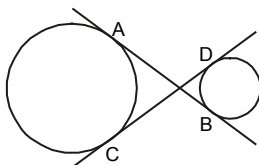
GEOMETRÍA

4. Si $AB = CD$ entonces:



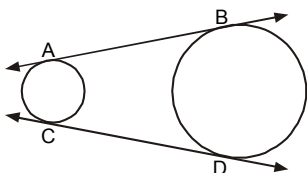
$$a = b$$

5. Tangentes comunes interiores.



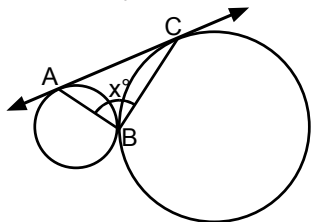
$$AB = CD$$

6. Tangentes comunes exteriores.



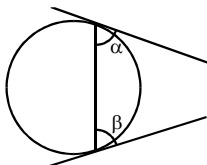
$$AB = CD$$

7. Si A, B y C son puntos de tangencia.



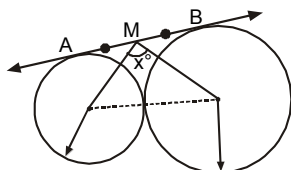
$$x = 90$$

8.



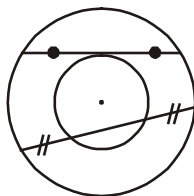
$$\alpha = \beta$$

9. Si "M" es punto medio de AB.

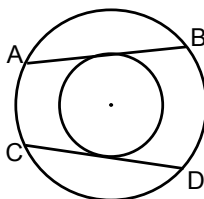


$$x = 90^\circ$$

10. En circunferencias concéntricas:

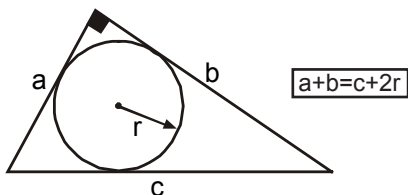


11. En circunferencias concéntricas:



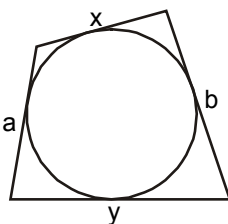
$$AB = CD$$

12. Teorema de Poncelet



$$a+b=c+2r$$

13. Teorema de Pithot



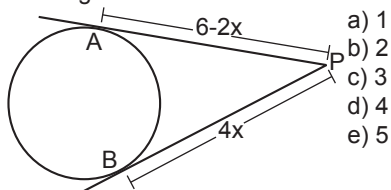
$$a+b = x+y = p$$

Donde:

p : semiperímetro del cuadrilátero.

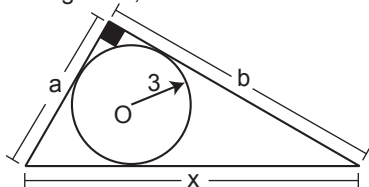
PROBLEMAS APLICATIVOS

1. Calcule "x". Si: A y B son puntos de tangencia.



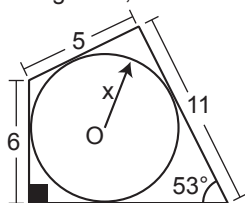
- a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

2. En el gráfico, calcule "x". Si: $a+b=28$



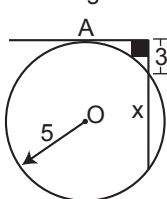
- a) 18
b) 19
c) 21
d) 22
e) 23

3. En el gráfico, calcule "x".



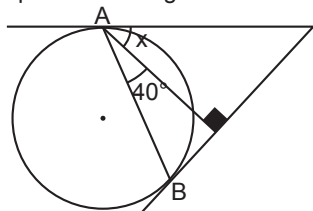
- a) 4
b) 3
c) 6
d) 2
e) 5

4. En el gráfico, calcule "x". Si: A es punto de tangencia.



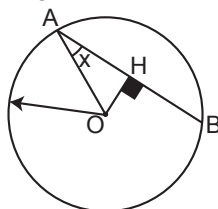
- a) 5
b) 6
c) 3
d) 2
e) 4

5. En la figura, calcule "x". Si: A y B son puntos de tangencia.



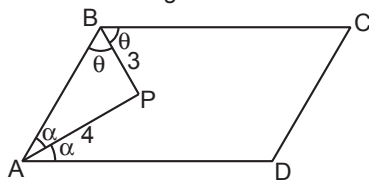
- a) 70°
b) 80°
c) 30°
d) 20°
e) 10°

6. En el gráfico, calcule "x". Si: $AB=2OH$



- a) 30°
b) 60°
c) 45°
d) 37°
e) 53°

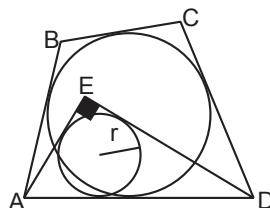
7. En el romboide ABCD, calcule el inradio del triángulo ABP



- a) 4
b) 3
c) 2
d) 1
e) 5

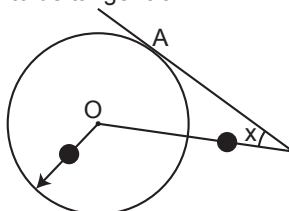
8. En el gráfico, calcule "r".

Si: $BC=2$; $AB=AE$; $CD=DE$



- a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

9. En la figura, calcule "x". Si: A es punto de tangencia.



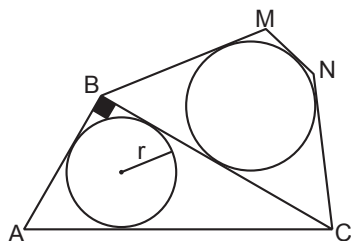
- a) 53°
b) 30°
c) 15°
d) 45°
e) 60°

10. En un triángulo rectángulo, calcular la longitud de la hipotenusa si los exradios relativos a los catetos miden 2 y 3.

- a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

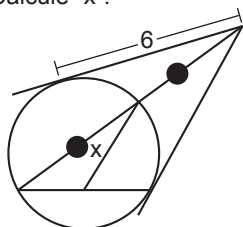
GEOMETRÍA

11. En la figura: $AB=MN+2$; $BM=NC$ y $AC=2BM$. Calcule "r".



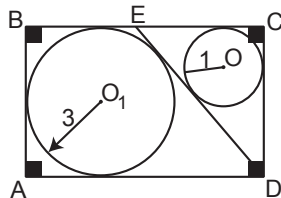
- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

12. Calcule "x".



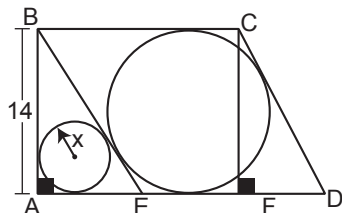
- a) 2
b) 3
c) 4
d) 6
e) 1

13. En el gráfico, calcule BE.



- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

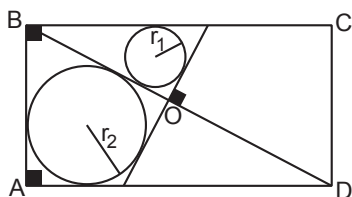
14. En la figura, calcule "x". Si: $EF=6$ y BCDE es un rombo.



- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

15. En el rectángulo ABCD, O es centro.

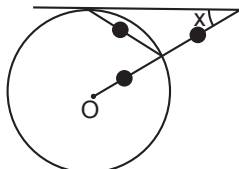
Calcule: $\frac{r_1}{r_2}$



- a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
d) $\frac{2}{3}$ e) $\sqrt{2}$

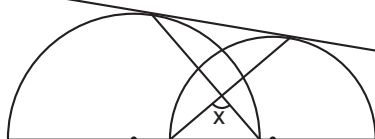
PROBLEMAS PROPUESTOS

1. En la figura, calcular "x", si: O es centro.



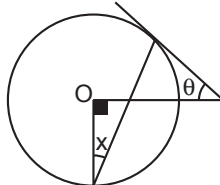
- a) 30° b) 15° c) 45°
d) 53° e) 37°

2. Calcule "x", en las semicircunferencias.



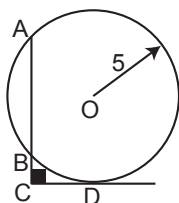
- a) 15° b) 100° c) 75°
d) 80° e) 90°

3. En la figura, calcule "x", O es centro.



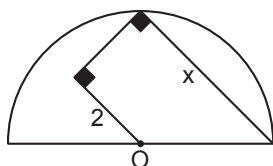
- a) q b) $\frac{\theta}{5}$ c) $\frac{\theta}{4}$
d) $\frac{\theta}{2}$ e) $\frac{\theta}{3}$

4. En la figura, calcule BC. Si: $AB=6$



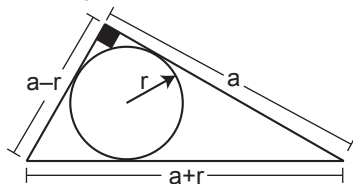
- a) 2 b) 1 c) 4
d) 3 e) $1/2$

5. En la figura, calcule "x". O es centro.



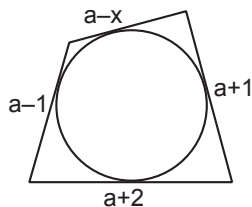
- a) 2 b) 3 c) 5
d) 4 e) 6

6. En la figura, calcule "x".



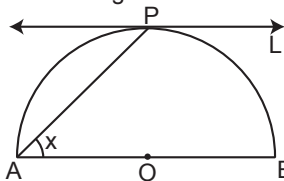
- a) 1 b) $\frac{2a}{3}$ c) $\frac{3a}{4}$
d) $\frac{a}{4}$ e) $\frac{5a}{4}$

7. En la figura, calcule "x".



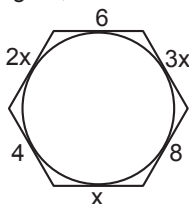
- a) 4 b) 3 c) 5
d) 1 e) 2

8. En la figura, calcule "x", si $L \parallel AB$. P es punto de tangencia.



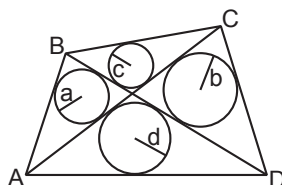
- a) 37° b) 45° c) 30°
d) 60° e) 53°

9. En la figura, calcule "x".



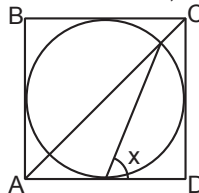
- a) 5 b) 4 c) 1
d) 3 e) 2

10. El cuadrilátero ABCD es circunscriptible y AC BD, calcule c+d. Si: $a+b=12$



- a) 12 b) 6 c) 8
d) 9 e) 4

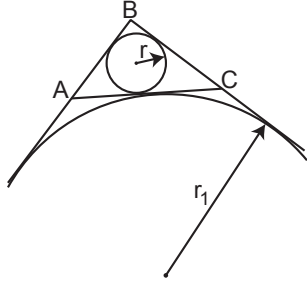
11. En el cuadrado ABCD, calcule "x".



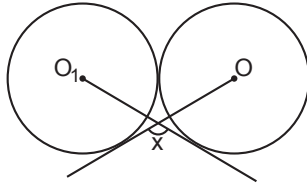
- a) 53° b) $67,5^\circ$ c) 37°
d) 45° e) 54°

GEOMETRÍA

12. En la figura, calcule “AC”.

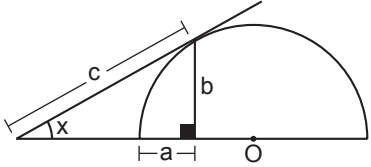


- a) $r_1 - r$ b) $r_1 + r$ c) $r_1 - r_2$
d) $\frac{r_1}{r_2}$ e) $\frac{r_2}{r_1}$
13. En las circunferencias congruentes, calcule “x”.



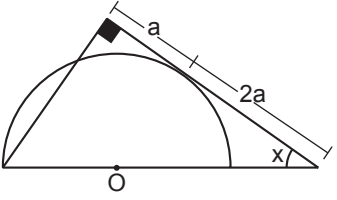
- a) 60° b) 90° c) 110°
d) 100° e) 120°

14. En el gráfico, calcule “x”. Si: $c = a + b$



- a) 37° b) 53° c) 60°
d) 30° e) 45°

15. En la figura, calcule “x”.



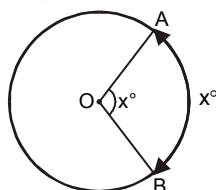
- a) 45° b) 60° c) 37°
d) 53° e) 30°

CLAVES				
1.a	2.d	3.a	4.e	5.e
6.c	7.d	8.a	9.b	10.d
11.a	12.b	13.e	14.d	15.c
1.a	2.e	3.d	4.a	5.d
6.d	7.e	8.b	9.d	10.a
11.b	12.a	13.e	14.e	15.e

Circunferencia II: Ángulos en la Circunferencia

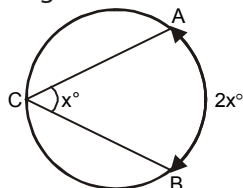
Ángulos en la circunferencia

1. Ángulo central



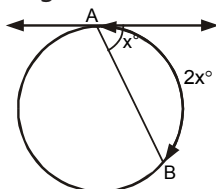
$$x = m\widehat{AB}$$

2. Ángulo inscrito



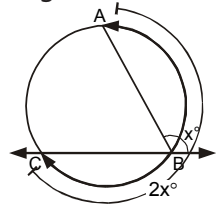
$$x = \frac{m\widehat{AB}}{2}$$

3. Ángulo semi-inscrito



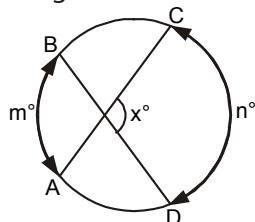
$$x = \frac{m\widehat{AB}}{2}$$

4. Ángulo ex-inscrito



$$x = \frac{m\widehat{ABC}}{2}$$

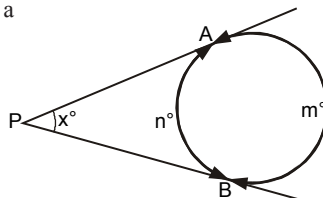
5. Ángulo interior



$$x = \frac{m+n}{2}$$

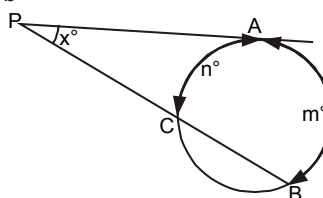
6. Ángulo exterior

a



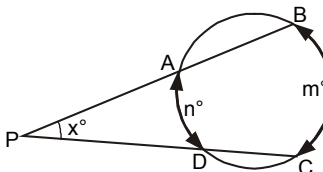
$$x = \frac{m-n}{2}$$

b



$$x = \frac{m-n}{2}$$

c



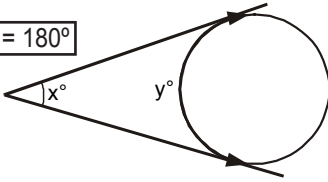
$$x = \frac{m-n}{2}$$

GEOMETRÍA

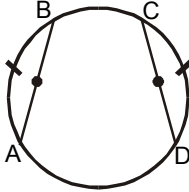
Propiedades

- De un ángulo exterior.

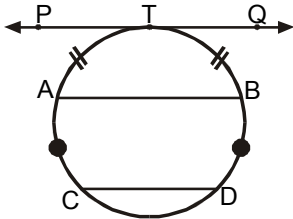
$$x + y = 180^\circ$$



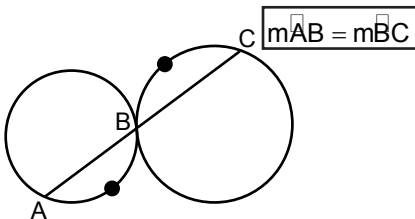
- Si $AB = CD$; entonces:



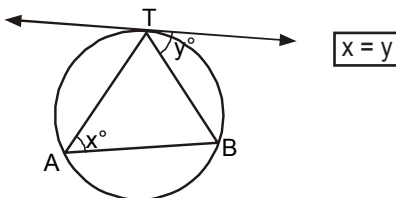
- Si: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ entonces $\widehat{AC} \cong \widehat{BD}$ o $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$, entonces



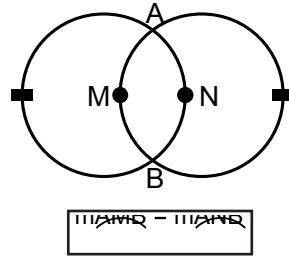
- En toda circunferencia.



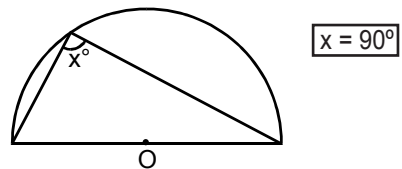
- Si "T" es punto de tangencia.



- En las circunferencias secantes congruentes.



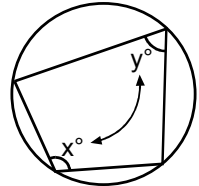
- En toda semicircunferencia.



En todo cuadrilátero inscrito:

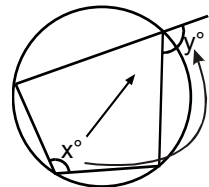
- Los ángulos opuestos son suplementarios.

$$x + y = 180^\circ$$



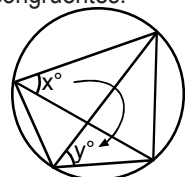
- Un ángulo interior es congruente al opuesto exterior.

$$x = y$$



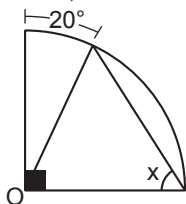
- Las diagonales con los lados opuestos forman ángulos congruentes.

$$x = y$$



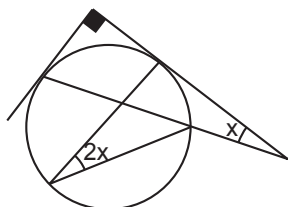
PROBLEMAS APLICATIVOS

1. Calcule "x", en el cuadrante.



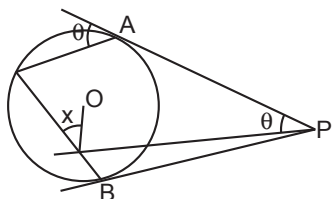
- a) 80°
- b) 65°
- c) 35°
- d) 70°
- e) 55°

2. Calcule "x".



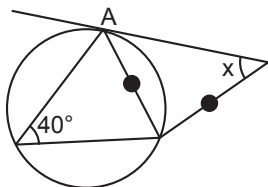
- a) 9°
- b) 16°
- c) 15°
- d) 18°
- e) 12°

3. En el gráfico A y B son puntos de tangencia y $m\angle APB = 50^\circ$.



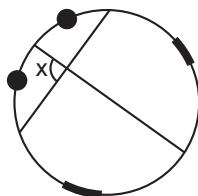
- a) 25°
- b) 55°
- c) 45°
- d) 65°
- e) 60°

4. Calcule "x". Si A es punto de tangencia.



- a) 90°
- b) 50°
- c) 40°
- d) 20°
- e) 10°

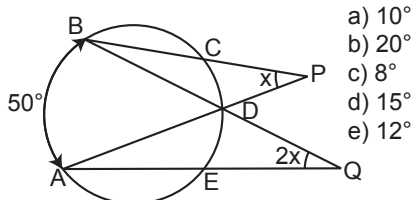
5. Calcule "x".



- a) 60°
- b) 120°
- c) 90°
- d) 80°
- e) 100°

6. En el gráfico, calcule "x".

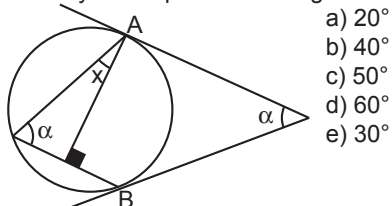
Si: $m\angle CDE = 40^\circ$



- a) 10°
- b) 20°
- c) 8°
- d) 15°
- e) 12°

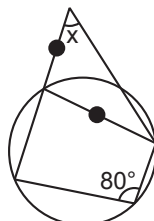
7. En el gráfico, calcule "x".

Si: A y B son puntos de tangencia.



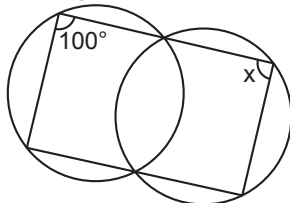
- a) 20°
- b) 40°
- c) 50°
- d) 60°
- e) 30°

8. En el gráfico, calcule "x".



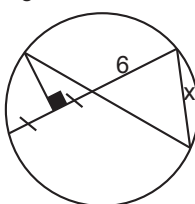
- a) 20
- b) 80
- c) 60
- d) 50
- e) 40

9. En la figura, calcule "x".



- a) 60°
- b) 50°
- c) 70°
- d) 80°
- e) 120°

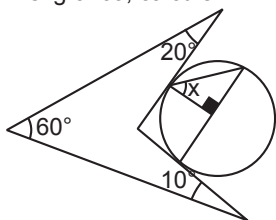
10. En el gráfico, calcule "x".



- a) 6
- b) 3
- c) 4
- d) 8
- e) 9

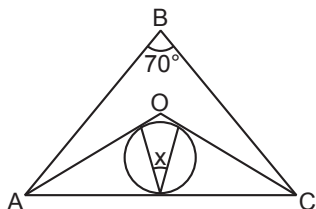
GEOMETRÍA

11. En el gráfico, calcule "x".



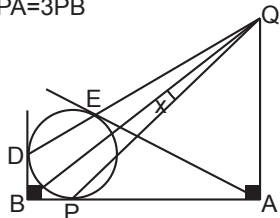
- a) 25°
- b) 60°
- c) 50°
- d) 45°
- e) 35°

12. En el sistema gráfico, calcule "x", si "O" es circuncentro.



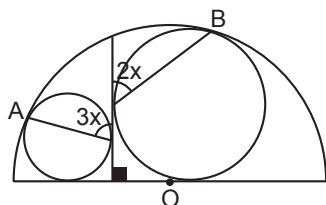
- a) 10°
- b) 20°
- c) 30°
- d) 40°
- e) 50°

13. Calcule "x", en el gráfico D, E y P son puntos de tangencia, tal que: $PA=3PB$



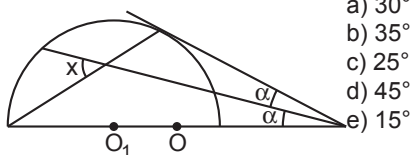
- a) 8°
- b) 7°
- c) 6°
- d) 12°
- e) 15°

14. En la figura, calcule "x".
Si: $m\widehat{AB}=120^\circ$



- a) 30°
- b) 65°
- c) 60°
- d) 70°
- e) 40°

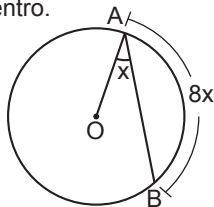
15. En el gráfico, calcule "x".



- a) 30°
- b) 35°
- c) 25°
- d) 45°
- e) 15°

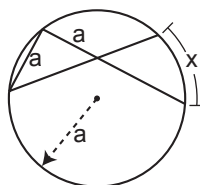
PROBLEMAS PROPUESTOS

1. En la figura, calcular el valor de "x". O es centro.



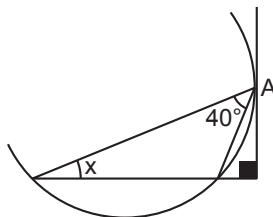
- a) 40°
- b) 35°
- c) 20°
- d) 30°
- e) 18°

2. En la figura, calcule el valor de "x".



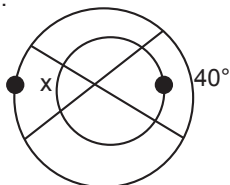
- a) 15°
- b) 45°
- c) 37°
- d) 18°
- e) 30°

3. Si A es punto de tangencia, calcule "x".



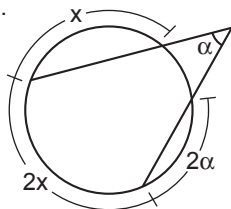
- a) 35°
- b) 36°
- c) 25°
- d) 15°
- e) 20°

4. En la circunferencia, calcule el valor de "x".



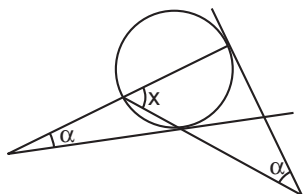
- a) 40°
- b) 36°
- c) 50°
- d) 45°
- e) 30°

5. En la circunferencia, calcule el valor de "x".



- a) 54° b) 48° c) 72°
d) 36° e) 60°

6. En la figura, calcule el valor de "x".

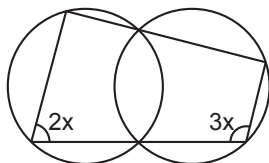


- a) 50° b) 60° c) 40°
d) 30° e) 20°

7. Se tiene 3 circunferencias congruentes, dos de ellos son tangentes exteriores en B y la otra pasa por B e intercepta en A y C a las dos primeras. Calcular la $m \angle BAC$, si $\widehat{AB} = 80^\circ$.

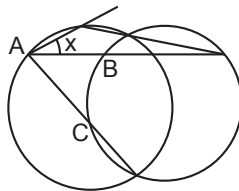
- a) 40° b) 80° c) 30°
d) 50° e) 60°

8. En las circunferencias, calcule el valor de "x".



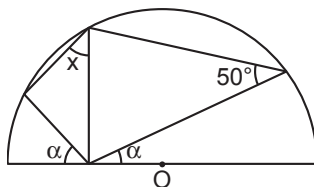
- a) 54° b) 48° c) 72°
d) 36° e) 18°

9. Calcular el valor de "x". Si: $m\widehat{BC} = 40^\circ$



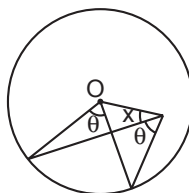
- a) 40° b) 20° c) 30°
d) 50° e) 45°

10. Si O es centro, calcule "x".



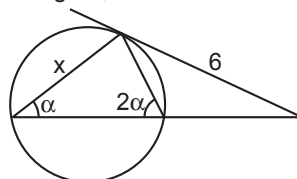
- a) 40° b) 30° c) 20°
d) 50° e) 25°

11. En la circunferencia de centro "O", calcule "x".



- a) $90 - \frac{\theta}{2}$ b) q c) 2q
d) $90 - q$ e) $90 - 2q$

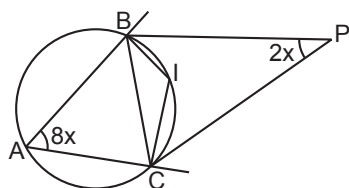
12. En la figura, calcule "x".



- a) 8 b) 2 c) 3
d) 4 e) 6

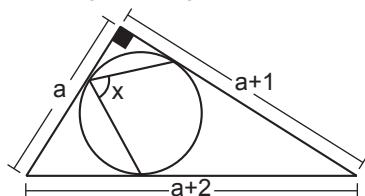
GEOMETRÍA

13. Calcule "x". Si I: incentro del triángulo PBC.



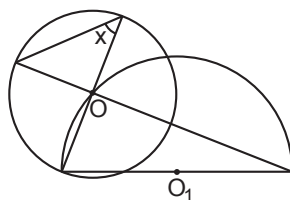
- a) 18 b) 12 c) 30
d) 20 e) 10

14. En la siguiente figura, calcule "x".



- a) $71,5^\circ$ b) 53° c) $26,5^\circ$
d) $17,5^\circ$ e) 127°

15. En la circunferencia, calcule "x".



- a) 45° b) 30° c) 60°
d) 53° e) 37°

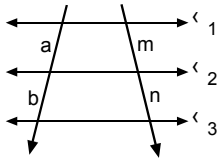
CLAVES

1.e	2.c	3.a	4.c	5.c
6.a	7.e	8.d	9.d	10.a
11.d	12.b	13.a	14.a	15.d
1.e	2.e	3.c	4.a	5.c
6.b	7.d	8.d	9.b	10.d
11.a	12.e	13.e	14.a	15.a

Proporcionalidad y Semejanza de Triángulos

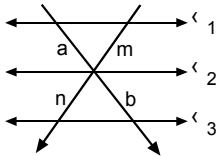
1. Teorema de Thales

Si: $\angle 1 // \angle 2 // \angle 3$



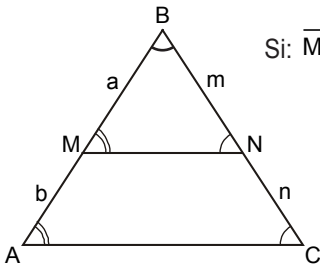
$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$$

Si: $\angle 1 // \angle 2 // \angle 3$



$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$$

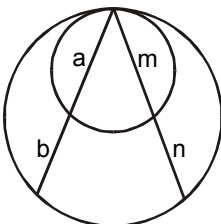
2. Consecuencia del teorema de Thales en un triángulo



Si: $\overline{MN} // \overline{AC}$

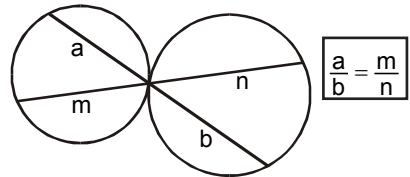
$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$$

3. En circunferencias tangentes interiores



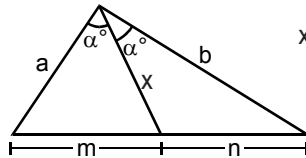
$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$$

4. En circunferencias tangentes exteriores



$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$$

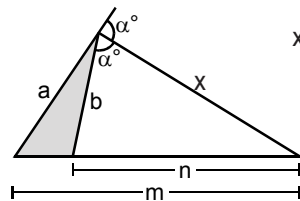
5. Teorema de la bisectriz interior



$$x^2 = a \cdot b - m \cdot n$$

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$$

6. Teorema de la bisectriz exterior

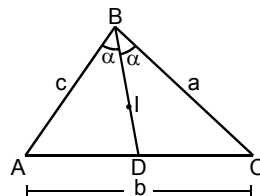


$$x^2 = m \cdot n - a \cdot b$$

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$$

7. Teorema del incentro

Si "I" es incentro del $\triangle ABC$.

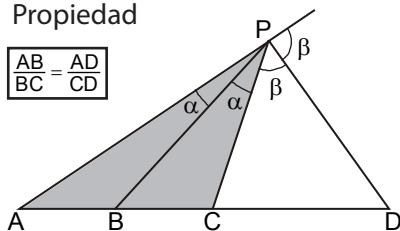


$$\frac{BI}{ID} = \frac{c+a}{b}$$

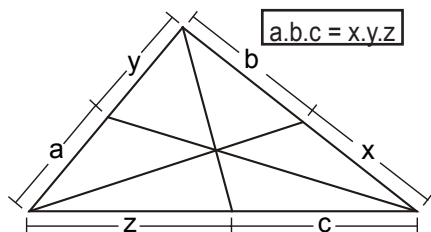
GEOMETRÍA

8. Propiedad

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}$$



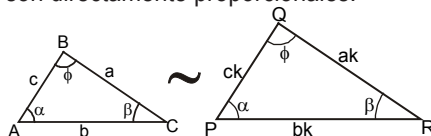
9. Teorema de Ceva



Semejanza de triángulos

Definición

Dos triángulos son semejantes, si tienen sus tres ángulos internos congruentes y las longitudes de sus lados homólogos son directamente proporcionales.

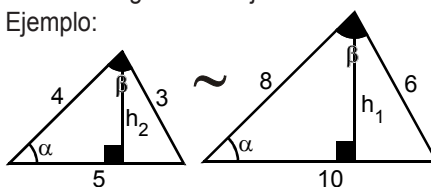


$\Rightarrow$ El $\triangle ABC \sim \triangle PQR$

Razón de semejanza (r)

Es aquel número real y positivo que se obtiene al dividir dos longitudes homólogas de dos triángulos semejantes.

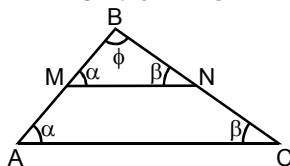
Ejemplo:



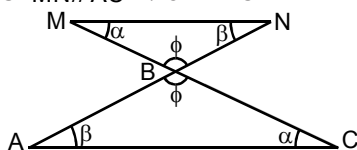
$$\text{Razón} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{10}{5} = \dots = \frac{h_1}{h_2} = 2$$

Algunas figuras donde se presentan triángulos semejantes

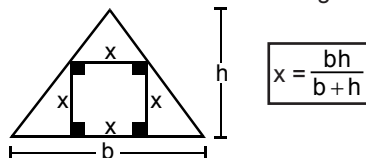
1. Si $\overline{MN} \parallel \overline{AC} \Rightarrow$ el $\triangle ABC \sim \triangle MBN$



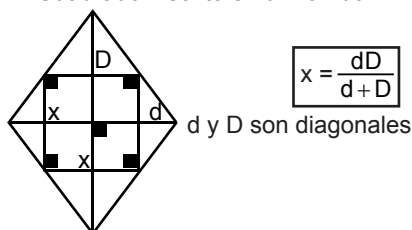
2. Si $\overline{MN} \parallel \overline{AC} \Rightarrow$ el $\triangle ABC \sim \triangle MBN$



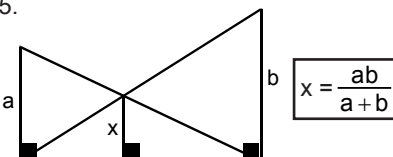
3. Cuadrado inscrito en un triángulo



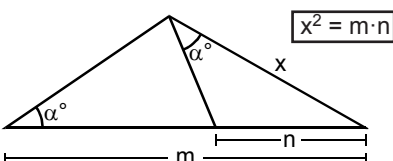
4. Cuadrado inscrito en un rombo.



5.



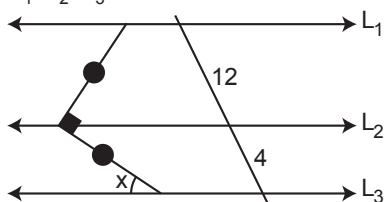
6.



PROBLEMAS APLICATIVOS

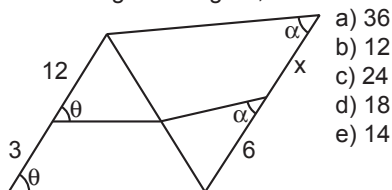
1. En la siguiente figura, calcule "x". Si:

$$L_1 // L_2 // L_3$$



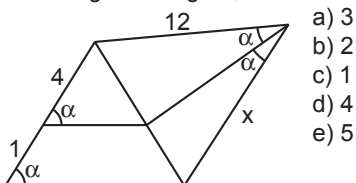
- a) 53° b) 60° c) 30°
d) $26,5^\circ$ e) $18,5^\circ$

2. En la siguiente figura, calcule "x".



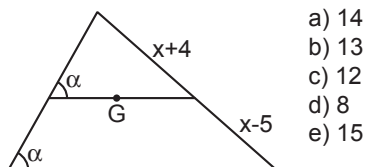
- a) 36
b) 12
c) 24
d) 18
e) 14

3. En la siguiente figura, calcule "x".



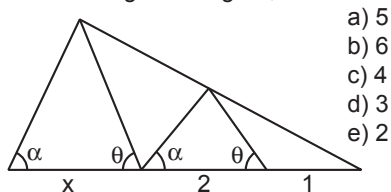
- a) 3
b) 2
c) 1
d) 4
e) 5

4. En la siguiente figura, calcule "x". Si G es baricentro.



- a) 14
b) 13
c) 12
d) 8
e) 15

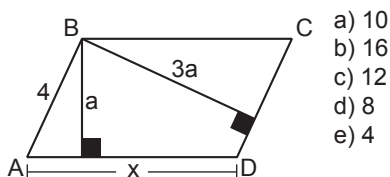
5. En la siguiente figura, calcule "x".



- a) 5
b) 6
c) 4
d) 3
e) 2

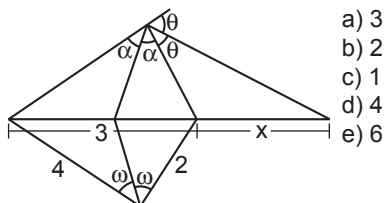
6. Calcule "x".

Si: ABCD es un romboide.



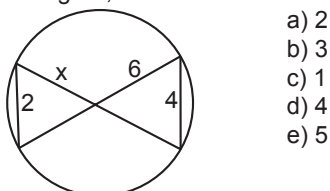
- a) 10
b) 16
c) 12
d) 8
e) 4

7. Calcule "x".



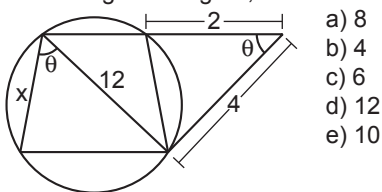
- a) 3
b) 2
c) 1
d) 4
e) 6

8. En la figura, calcule "x".



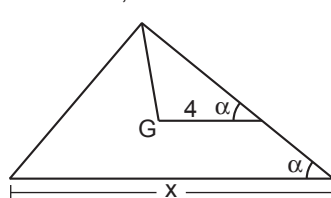
- a) 2
b) 3
c) 1
d) 4
e) 5

9. En la siguiente figura, calcule "x".



- a) 8
b) 4
c) 6
d) 12
e) 10

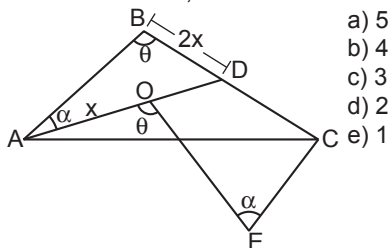
10. Calcule "x", si G es baricentro.



- a) 6 b) 8 c) 12
d) 14 e) 16

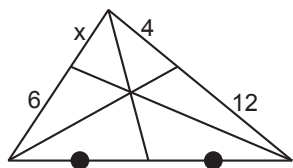
GEOMETRÍA

11. Calcule "x", si O es circuncentro del $\triangle ABC$. $CD=2$; $EC=3$.



- a) 5
b) 4
c) 3
d) 2
e) 1

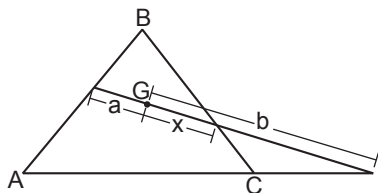
12. Calcule "x".



- a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

13. Calcule "x", si G es baricentro y

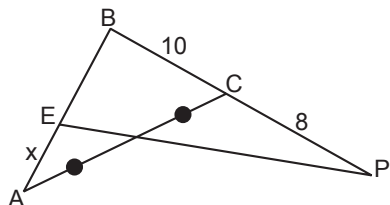
$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{4}$$



- a) 8
b) 2
c) 3
d) 1
e) 4

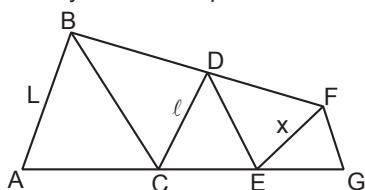
14. Calcule "x".

Si: $AB=6$



- a) $\frac{24}{13}$
b) $\frac{18}{5}$
c) $\frac{13}{3}$
d) 4
e) 2

15. Calcule "x", si los triángulos ABC, CDE y EFG son equiláteros.

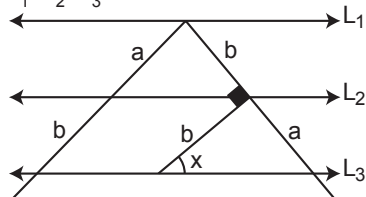


- a) $\frac{L}{l}$
b) Ll
c) $\frac{L^2}{l}$
d) $\frac{l}{L}$
e) $\frac{l^2}{L}$

PROBLEMAS PROPUESTOS

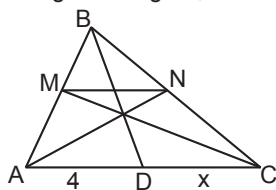
1. En la siguiente figura, calcule "x". Si:

$$L_1 // L_2 // L_3$$



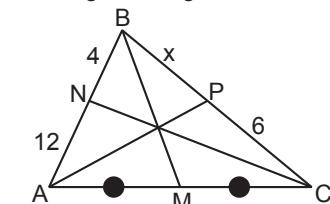
- a) 30°
b) 60°
c) 53°
d) 45°
e) 60°

2. En la siguiente figura, calcule "x".



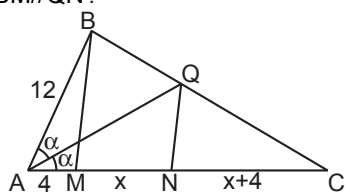
- a) 2
b) 6
c) 5
d) 3
e) 4

3. En la siguiente figura, calcule "x".



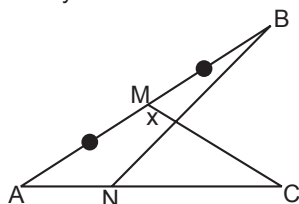
- a) 1
b) 6
c) 4
d) 2
e) 3

4. En la siguiente figura, calcule "x". Si $\overline{BM} \parallel \overline{QN}$.



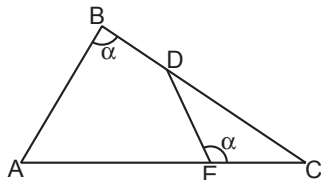
- a) 4 b) 2 c) 3
d) 6 e) 8

5. En la siguiente figura, calcule "x". Si: $CM=10$ y $CN=2AN$



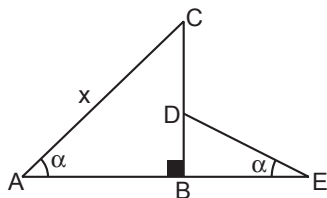
- a) 2 b) 3 c) 4
d) 5 e) 5/3

6. En la figura, $BC=AE$; $CD=4$ y $EC=3$. Calcule AE.



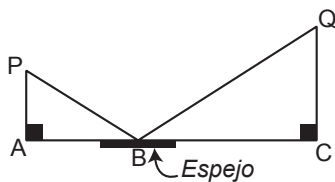
- a) 7 b) 8 c) 9
d) 10 e) 12

7. En la figura, $2AB=3EB$; $BD=2CD$ y $DE=4$. Calcule AC.



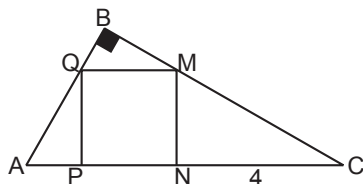
- a) 5 b) 6 c) 8
d) 10 e) 12

8. Del punto P, se observa el punto Q en el espejo en B, si $PB=2$ y $BC=3AB$. Calcule BQ.



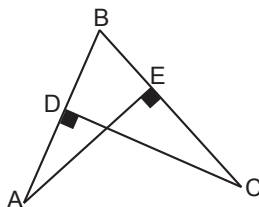
- a) 7 b) 5 c) 4
d) 6 e) 8

9. En la figura PQMN es un cuadrado, $AP=1$ y $NC=4$. Calcule NP.



- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

10. En la figura, $AD=DB$; $BE=2$ y $EC=7$. Calcule AD.



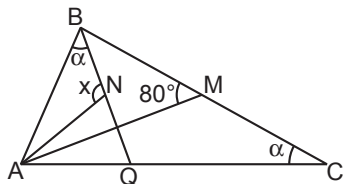
- a) 3 b) 4 c) 5
d) 2 e) 6

11. Las bases de un trapecio miden 4 y 8 y la altura 9, calcule la distancia del punto de intersección de los lados no paralelos a la base mayor.

- a) 14 b) 15 c) 16
d) 7 e) 18

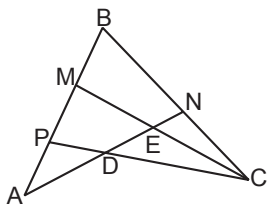
GEOMETRÍA

12. Si: $BN=NQ$ y $BM=MC$, calcule "x".



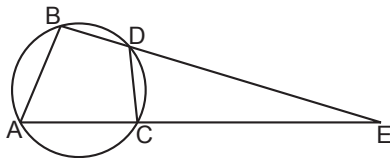
- a) 80° b) 100° c) 110°
d) 120° e) 135°

13. Si: $AP=PM=MB$; $BN=NC$; $DE=3$; calcule EN.



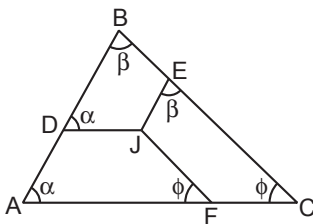
- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

14. En el triángulo ABC, $DE=a$ y $AE=6a$. Calcule CD. Si: $AB=12$.



- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 6

15. Si: $JD=JE=JF$ y $AD \cdot BE \cdot CF=64$. Calcule JD.



- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

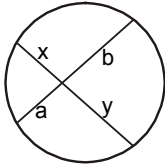
CLAVES

1.e	2.c	3.a	4.a	5.b
6.c	7.a	8.b	9.c	10.c
11.b	12.b	13.e	14.a	15.e
1.d	2.e	3.d	4.d	5.a
6.c	7.b	8.d	9.b	10.a
11.e	12.b	13.b	14.b	15.d

Relaciones Métricas en la Circunferencia y en los Triángulos Rectángulos

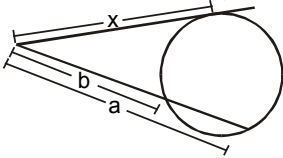
Relaciones métricas en la circunferencia

Teorema de las cuerdas



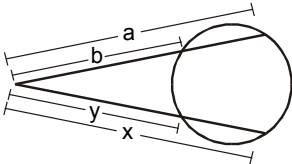
$$a \cdot b = x \cdot y$$

Teorema de la tangente



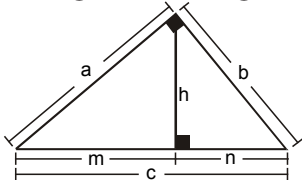
$$x^2 = a \cdot b$$

Teorema de las secantes



$$a \cdot b = x \cdot y$$

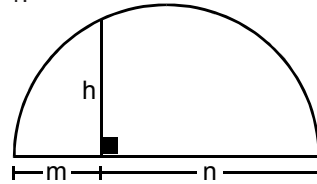
Relaciones métricas en los triángulos rectángulos



- 1) $a^2 = c \cdot m$
- 2) $b^2 = c \cdot n$
- 3) $a^2 + b^2 = c^2$
- 4) $a \cdot b = c \cdot h$
- 5) $h^2 = m \cdot n$
- 6) $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$

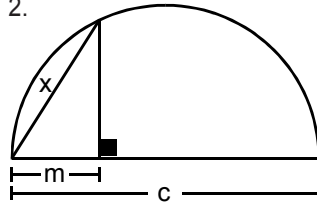
Propiedades

1.



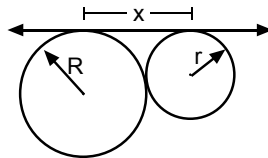
$$h^2 = m \cdot n$$

2.



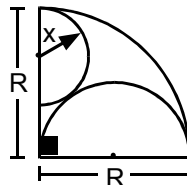
$$x^2 = c \cdot m$$

3.



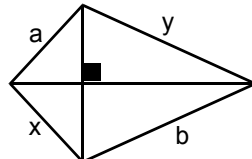
$$x = 2\sqrt{Rr}$$

4.



$$x = \frac{R}{3}$$

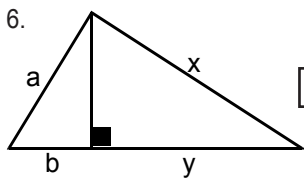
5.



$$a^2 + b^2 = x^2 + y^2$$

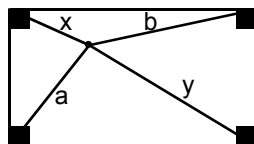
GEOMETRÍA

6.



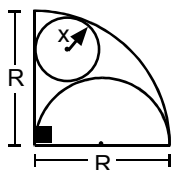
$$a^2 - b^2 = x^2 - y^2$$

7.



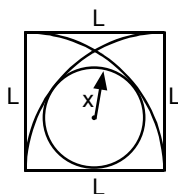
$$a^2 + b^2 = x^2 + y^2$$

8.



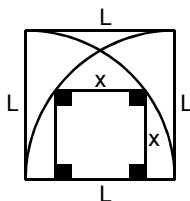
$$x = \frac{R}{4}$$

9.



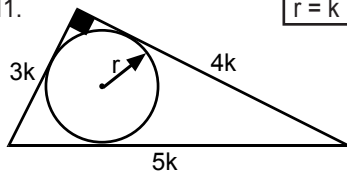
$$x = \frac{3L}{8}$$

10.



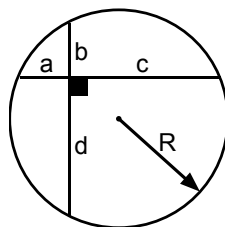
$$x = \frac{3L}{5}$$

11.



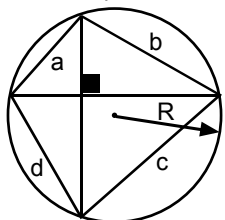
$$r = k$$

12. Teorema de Faure



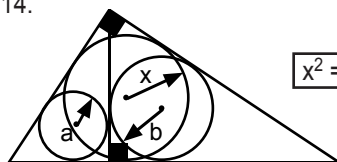
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4R^2$$

13. Teorema de Arquímedes



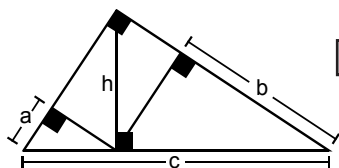
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 8R^2$$

14.



$$x^2 = a^2 + b^2$$

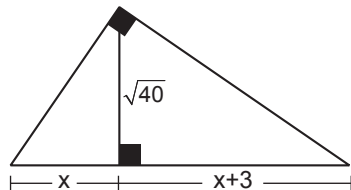
15.



$$h^3 = abc$$

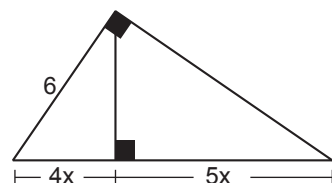
PROBLEMAS APLICATIVOS

1. Calcule "x".



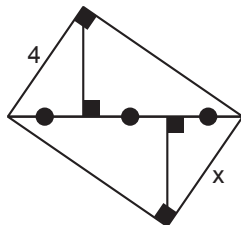
- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

2. Calcule "x".



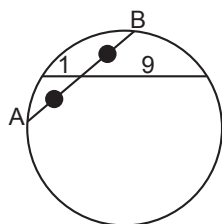
- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

3. Calcule "x".



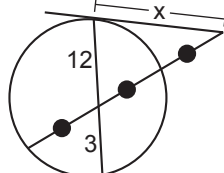
- a) 12
b) 8
c) 6
d) 2
e) 4

4. Calcule AB.



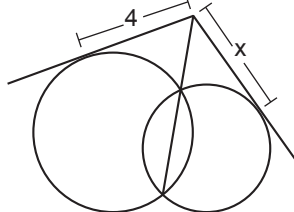
- a) 3
b) 4
c) 2
d) 5
e) 6

5. Calcule "x".



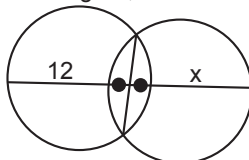
- a) $6\sqrt{3}$
b) $2\sqrt{3}$
c) $\sqrt{3}$
d) 6
e) 12

6. Calcule "x".



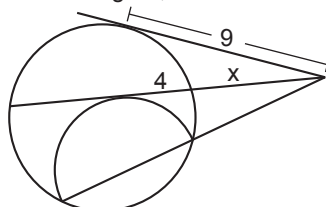
- a) 12
b) 8
c) 6
d) 2
e) 4

7. En la figura, calcule "x".



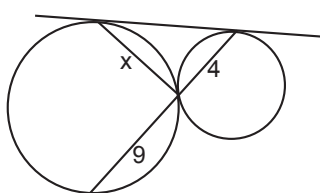
- a) 10
b) 4
c) 8
d) 6
e) 12

8. En la figura, calcule "x".



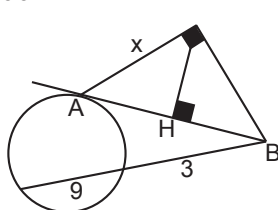
- a) 2
b) 7
c) 3
d) 4
e) 5

9. Calcule "x".



- a) 3
b) 8
c) 5
d) 4
e) 6

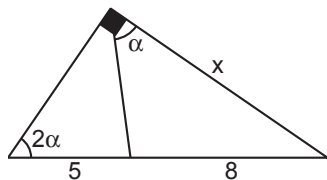
10. Calcule "x", si A es punto de tangencia. $HB=2AH$.



- a) 6
b) $\sqrt{6}$
c) 12
d) $2\sqrt{3}$
e) $\sqrt{3}$

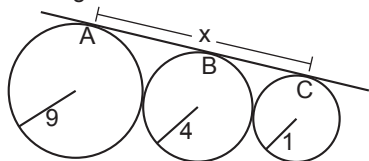
GEOMETRÍA

11. Calcule "x".



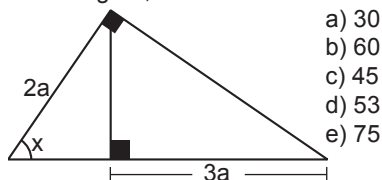
- a) 12
- b) 11
- c) 10
- d) 9
- e) 6

12. Calcule "x". Si: A, B y C son puntos de tangencia.



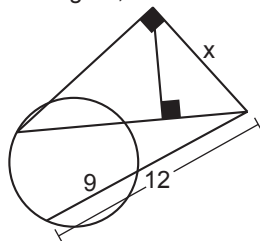
- a) 32
- b) 48
- c) 42
- d) 16
- e) 52

13. En la figura, calcule "x".



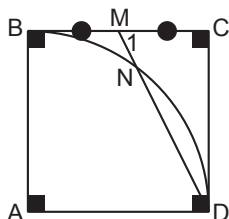
- a) 30
- b) 60
- c) 45
- d) 53
- e) 75

14. En la figura, calcule "x".



- a) 9
- b) 8
- c) 3
- d) 6
- e) 4

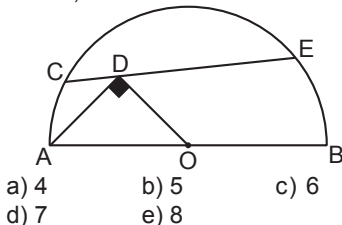
15. Calcule el lado del cuadrado ABCD.



- a) $5\sqrt{3}$
- b) $\sqrt{3}$
- c) $3\sqrt{5}$
- d) $2\sqrt{5}$
- e) $\sqrt{5}$

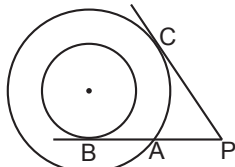
PROBLEMAS PROPUESTOS

1. En la figura $CD = 4$; $DE = 9$ y O es centro, calcule AD.



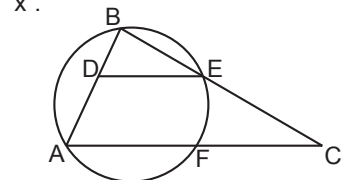
- a) 4
- b) 5
- c) 6
- d) 7
- e) 8

2. En la figura B y C son puntos de tangencia, $PA = 2$; $AB = 3$ y las circunferencias son concéntricas, calcule PC.



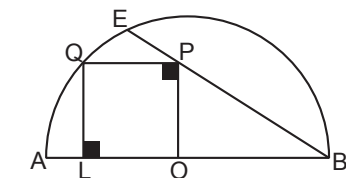
- a) 1
- b) 2
- c) 3
- d) 4
- e) 5

3. En la circunferencia $AD = DB$; $BE = EC = 2$; $DE = 2x$ y $AF = 3x$. Calcule el valor de "x".



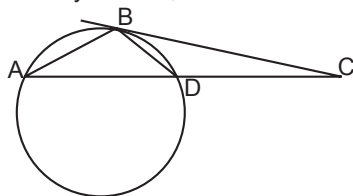
- a) $\sqrt{3}$
- b) 1
- c) 2
- d) $\sqrt{2}$
- e) 4

4. Si: "O" es centro; OPQL es un cuadrado; $OP = 3$; calcule PE.



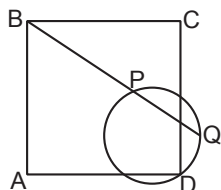
- a) $\sqrt{2}$
- b) $\sqrt{3}$
- c) 1
- d) 2
- e) 3

5. Si B es punto de tangencia, $BD=4$; $AD=5$ y $AB=BC$; calcule: AB



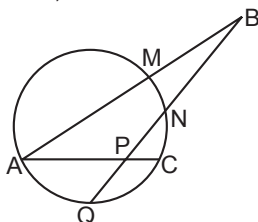
- a) 5 b) 6 c) 7
d) 8 e) 9

6. En la figura ABCD es un cuadrado, $BP=4$; $PQ=5$ y O es centro del cuadrado, calcule AB.



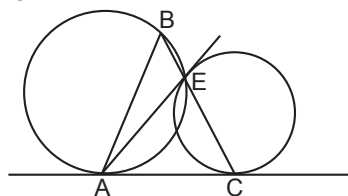
- a) 5 b) 7 c) 6
d) 8 e) 9

7. En la figura, $PQ=2PC$; $AP=4$; $PQ+BN=6$; $AB=2BN$. Calcule: BM



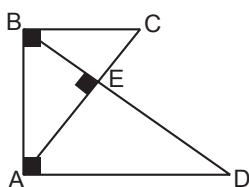
- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

8. En la figura: A, E y C son puntos de tangencia; $AB=8$ y $EC=2$. Calcule AC.



- a) 3 b) 6 c) 5
d) 7 e) 4

9. En la figura, $AE=4$ y $EC=1$; calcule ED.



- a) 6 b) 7 c) 8
d) 9 e) 12

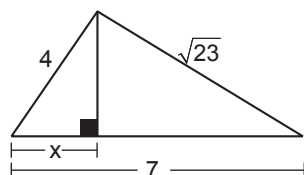
10. En un triángulo rectángulo dos medianas son perpendiculares, si el cateto mayor mide $2\sqrt{2}$, calcule el cateto menor.

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

11. Un cateto mide $\sqrt{11}$ y los otros dos lados se diferencian en 1. ¿Cuánto mide el otro cateto?

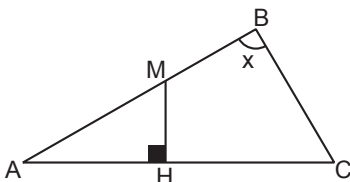
- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

12. En la figura, calcule "x".



- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

13. En la figura, $AM=MB$; $MH=4$; $AH=8$ y $HC=12$. Calcule "x".



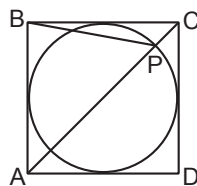
- a) 60° b) 90° c) 75°
d) 80° e) 100°

GEOMETRÍA

14. Un papel de forma rectangular de dimensiones $4\sqrt{2}$ y 16, se dobla de modo que dos vértices opuestos coinciden, calcule la longitud del doblez.

- a) 7 b) 4 c) 8
d) 6 e) 5

15. Se tiene un cuadrado circunscrito a una circunferencia $AB=2$; calcule BP.



- a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{3}$ c) 1
d) 2 e) 3

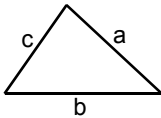
CLAVES				
1.e	2.a	3.e	4.e	5.a
6.e	7.e	8.e	9.e	10.d
11.a	12.d	13.b	14.d	15.d
1.c	2.d	3.d	4.b	5.b
6.c	7.d	8.e	9.c	10.b
11.e	12.c	13.b	14.a	15.b

Relaciones Métricas en los Triángulos Oblicuángulos

Naturaleza de un triángulo

Aprenderemos a reconocer si un triángulo es acutángulo, obtusángulo o rectángulo, conociendo las medidas de sus lados.

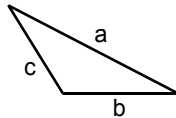
1°



Si: $a^2 < b^2 + c^2$

⇒ El Δ es acutángulo

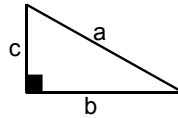
2°



Si: $a^2 > b^2 + c^2$

⇒ El Δ es obtusángulo

3°



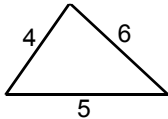
Si: $a^2 = b^2 + c^2$

⇒ El Δ es rectángulo

EJEMPLO:

Si los lados de un triángulo miden 4, 5 y 6. ¿Qué clase de triángulo es?

SOLUCIÓN:



Como:

$6^2 ? 4^2 + 5^2$

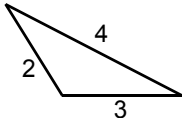
$36 < 41$

El triángulo es acutángulo.

EJEMPLO:

Si los lados de un triángulo miden 2, 3 y 4. ¿Qué clase de triángulo es?

SOLUCIÓN:



Como:

$4^2 ? 2^2 + 3^2$

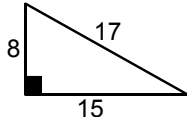
$16 > 13$

El triángulo es obtusángulo.

EJEMPLO:

Si los lados de un triángulo miden 8, 15 y 17. ¿Qué clase de triángulo es?

SOLUCIÓN:



Como:

$17^2 ? 8^2 + 15^2$

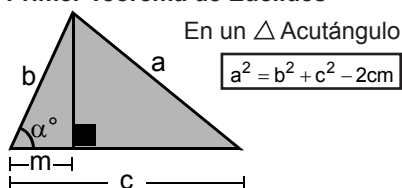
$289 = 289$

El triángulo es rectángulo.

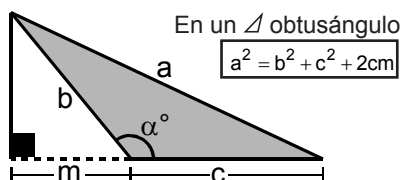
GEOMETRÍA

Teoremas en los triángulos oblicuángulos

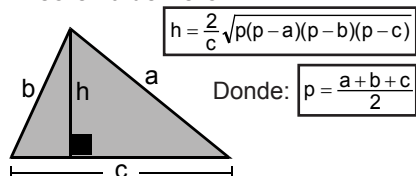
1. Primer Teorema de Euclides



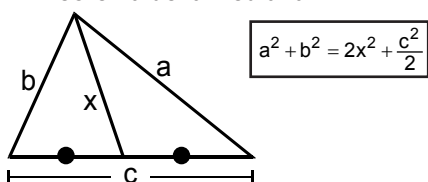
2. Segundo Teorema de Euclides



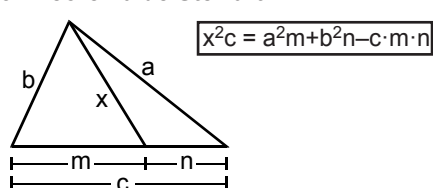
3. Teorema de Herón



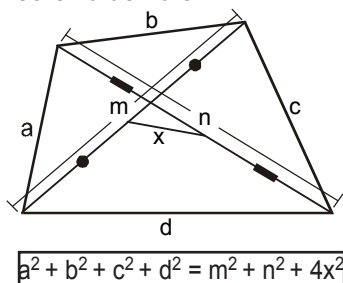
4. Teorema de la Mediana



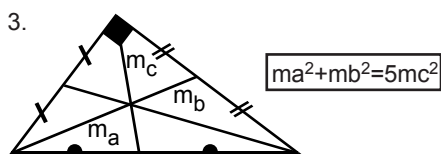
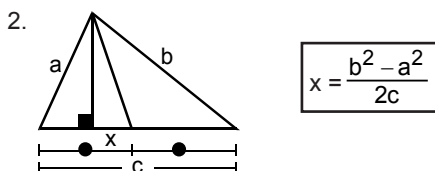
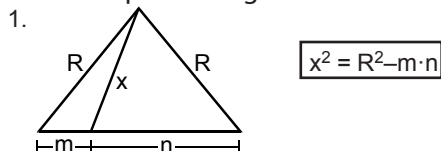
5. Teorema de Stewart



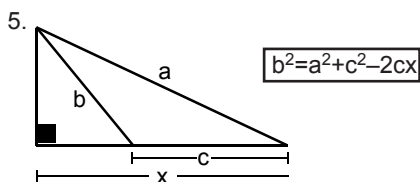
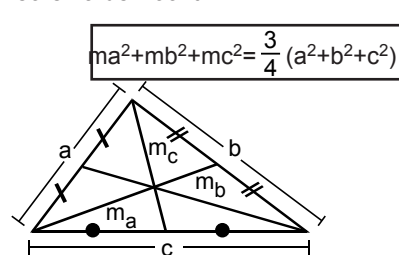
6. Teorema de Euler



Propiedades generales

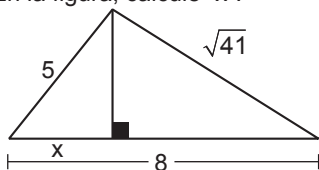


4. Teorema de Booht



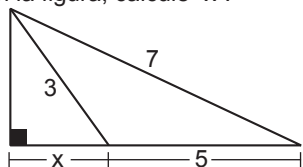
PROBLEMAS APLICATIVOS

1. En la figura, calcule "x".



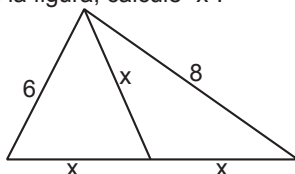
- a) 0,5 b) 4 c) 1
d) 2 e) 3

2. En la figura, calcule "x".



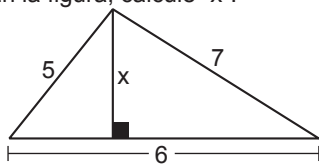
- a) 8,1 b) 1,5 c) 2,4
d) 3,2 e) 1,4

3. En la figura, calcule "x".



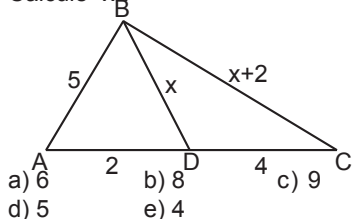
- a) 1 b) 2 c) 4
d) 3 e) 5

4. En la figura, calcule "x".



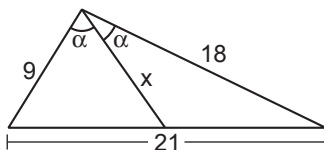
- a) $2\sqrt{6}$ b) $3\sqrt{7}$ c) $2\sqrt{6}$
d) $5\sqrt{3}$ e) $6\sqrt{2}$

5. Calcule "x".



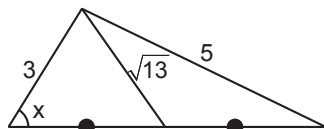
- a) 6 b) 8 c) 9
d) 5 e) 4

6. Calcule "x".



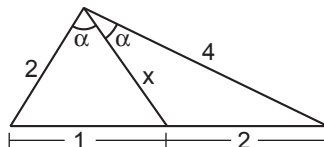
- a) 7 b) 6 c) 8
d) 9 e) 5

7. Calcule "x".



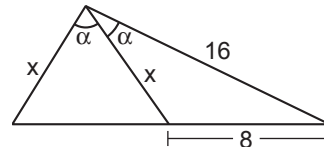
- a) 60 b) 75 c) 53
d) 90 e) 74

8. Calcule "x".



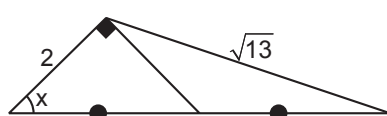
- a) $\sqrt{6}$ b) $\sqrt{3}$ c) $\sqrt{2}$
d) $\sqrt{5}$ e) 2

9. Calcule "x".



- a) 8 b) 6 c) 4
d) 12 e) 5

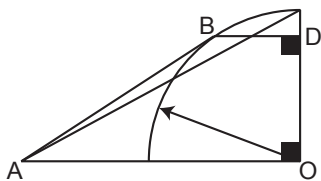
10. Calcule "x".



- a) 53 b) 60 c) 37
d) 60 e) 45

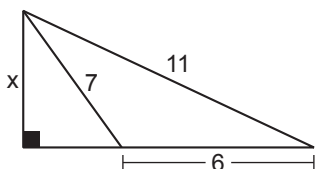
GEOMETRÍA

11. Calcule BD. Si: $AC^2 - AB^2 = 8AO$



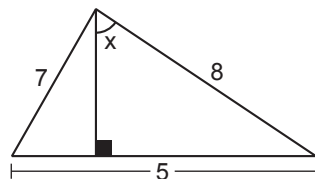
- a) 4 b) 2 c) 3
d) 8 e) 6

12. Calcule "x".



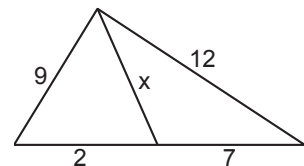
- a) 6 b) 5 c) 4
d) 3 e) $2\sqrt{10}$

13. Calcule "x".



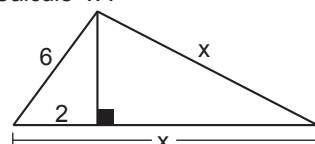
- a) 30° b) 37° c) 53°
d) 45° e) 60°

14. Calcule "x".



- a) 5 b) 6 c) 7
d) 8 e) 9

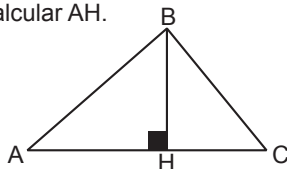
15. Calcule "x".



- a) 1 b) 3 c) 4
d) 7 e) 9

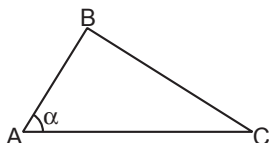
PROBLEMAS PROPUESTOS

1. En la figura $AB=7$, $BC=8$ y $AC=5$. Calcule AH.



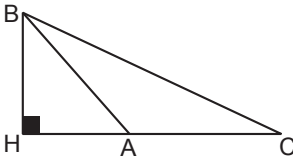
- a) 2 b) 1 c) 4
d) $\sqrt{5}$ e) 3

2. En la figura, $AB=3$; $BC=7$ y $AC=8$. Calcule el valor de a.



- a) 30° b) 37° c) 53°
d) 60° e) 45°

3. Si: $AB=7$; $BC=13$; $AC=10$. Calcule AH.

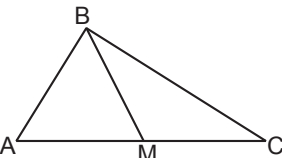


- a) 1 b) 2 c) 4
d) 3 e) 5

4. En un triángulo ABC, $AB=4$; $BC=5$ y $AC=6$; se traza la mediana $\overline{BM}$. Calcule BM.

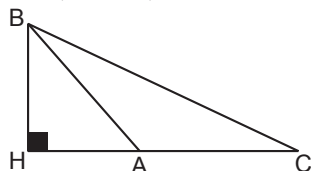
- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) $\sqrt{\frac{23}{2}}$

5. En la figura, $BM=\sqrt{10}$; $BC=6$; $AB=AM=MC$. Calcule AB.



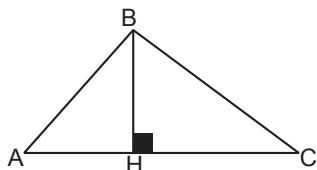
- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

6. Si: $AB=9$; $BC=12$; $AC=7$. Calcular AH



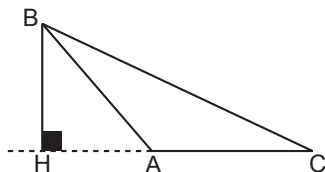
- a) 2 b) 3 c) 1
d) 4 e) 5

7. Si: $AB=5$; $BC=7$ y $AC=6$. Calcular el valor de la altura BH .



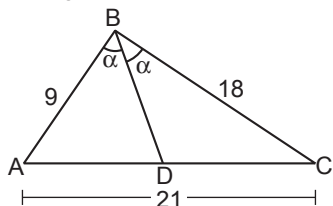
- a) 4 b) 3 c) 2
d) 1 e) $2\sqrt{6}$

8. En la figura, $AB=4$; $BC=8$; $AC=6$. Calcular el valor de la altura BH .



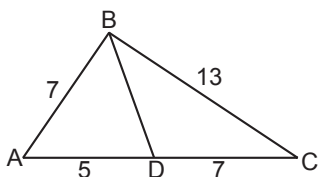
- a) 3 b) 2 c) 1
d) $\sqrt{3}$ e) $\sqrt{15}$
a) $\sqrt{6}$ b) c) $\sqrt{2}$
d) $\sqrt{5}$ e) 2

9. En la figura, calcular BD .



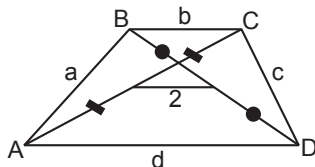
- a) 7 b) 6 c) 8
d) 9 e) 5

10. En la figura, calcular BD .



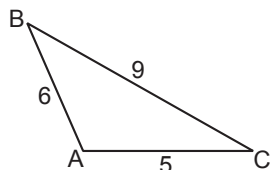
- a) 6 b) 8 c) 9
d) 5 e) 4

11. En la figura, calcular el valor de: $AC^2 + BD^2$. Si: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 50$.



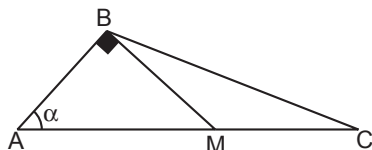
- a) 53 b) 60 c) 34
d) 45 e) 30

12. Calcular BH . (BH : Altura)



- a) 5 b) $4\sqrt{2}$ c) 4
d) 3 e) 2

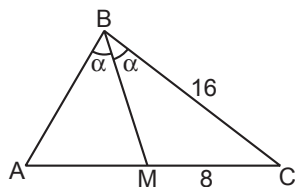
13. En la figura: $AB=2$; $BC=\sqrt{20}$, $AM=MC$. Calcular el valor de a .



- a) 53° b) 30° c) 37°
d) 37° e) 45°

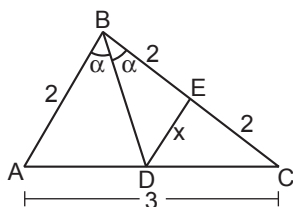
GEOMETRÍA

14. En la figura, $AB=BM$. Calcular: AB



- a) 11 b) 10 c) 13
d) 14 e) 12

15. En la figura, calcular "x".



- a) $\sqrt{6}$ b) $\sqrt{3}$ c) 2
d) 1 e) $\sqrt{5}$

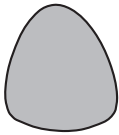
CLAVES				
1.e	2.b	3.e	4.a	5.d
6.c	7.d	8.a	9.d	10.c
11.a	12.	13.e	14.e	15.e
1.b	2.d	3.a	4.e	5.d
6.c	7.e	8.e	9.c	10.e
11.c	12.b	13.e	14.e	15.d

Áreas I

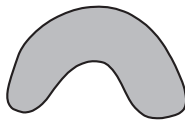
Región plana

Es una porción de plano, limitada por una o más líneas llamada frontera o borde de la región.

Una región puede ser abierta o cerrada, estudiaremos las regiones que incluyen la frontera.



Convexo

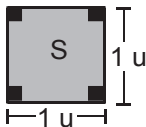


No convexo

Postulado del área

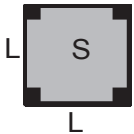
A cada región le corresponde exactamente un número real positivo llamado área.

Unidad cuadrada

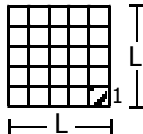


$$S = 1 u^2$$

Postulado de la unidad

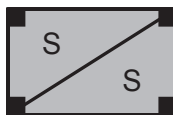
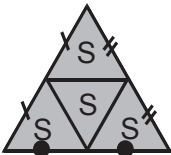


$$S = L^2$$

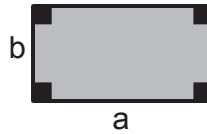


$$n(1) = L \Rightarrow S = n^2 = L^2$$

Postulado de congruencia

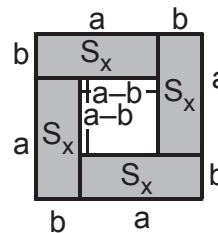


Teorema



$$S = a \cdot b$$

Demostración

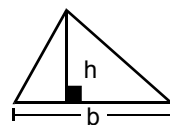


$$4S_x + (a-b)^2 = (a+b)^2$$

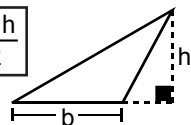
$$a \quad 4S_x = 4ab$$

$$S_x = a \cdot b$$

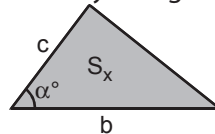
Área de una región triangular



$$S = \frac{b \cdot h}{2}$$

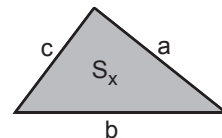


Dos lados y el ángulo entre ellos



$$S_x = \frac{bc \cdot \text{Sen } \alpha}{2}$$

Teorema de Herón

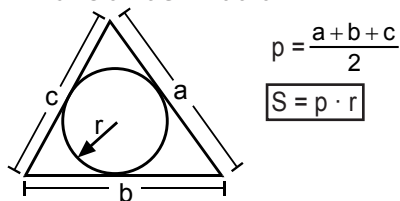


$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

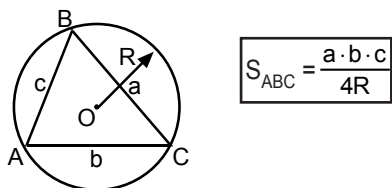
$$S_x = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

GEOMETRÍA

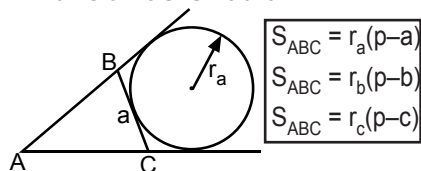
En función del inradio



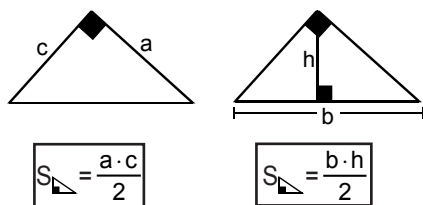
En función del circunradio



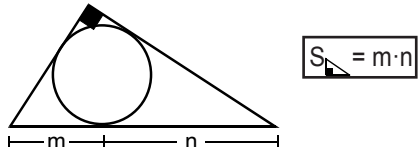
En función del exradio



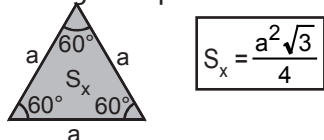
En un triángulo rectángulo



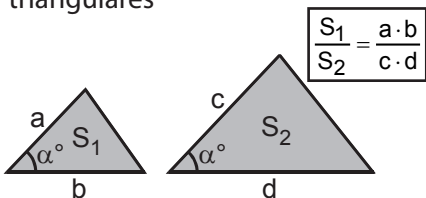
Teorema de Burlet



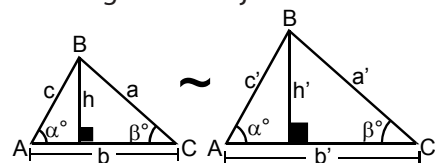
En un triángulo equilátero



Relación de áreas de regiones triangulares



En triángulos semejantes

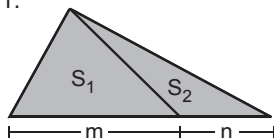


$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{a^2}{(a')^2} = \frac{b^2}{(b')^2} = \frac{c^2}{(c')^2} = \frac{h^2}{(h')^2} = \dots = k^2$$

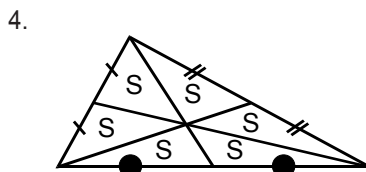
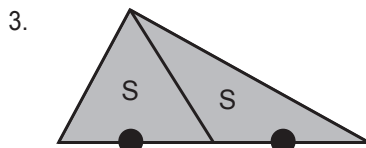
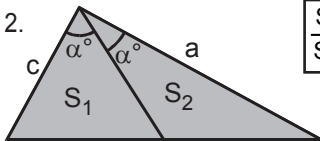
k : Razón de semejanza

Propiedades

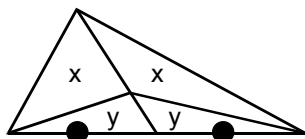
1. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{m}{n}$



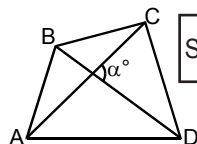
2. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{c}{a}$



5.

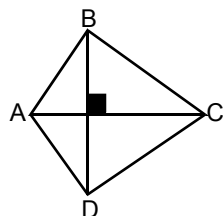


Área de regiones cuadrangulares
cuadrilátero cualquiera



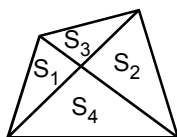
$$S_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD \cdot \text{Sen } \alpha}{2}$$

Nota: Si: $\alpha = 90^\circ$.

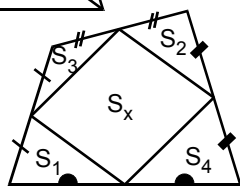


$$S_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2}$$

Propiedades para todo cuadrilátero

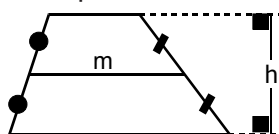


$$S_1 \cdot S_2 = S_3 \cdot S_4$$

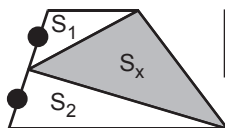


$$S_1 + S_2 = S_3 + S_4 = \frac{S_x}{2} = \frac{S_T}{4}$$

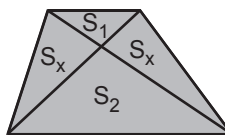
En trapezios



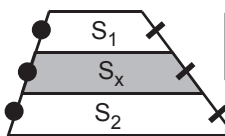
$$S = m \cdot h$$



$$S_1 + S_2 = S_x = \frac{S_T}{2}$$

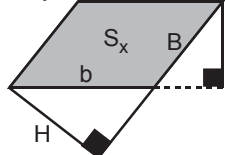


$$S_x = \sqrt{S_1 \cdot S_2}$$



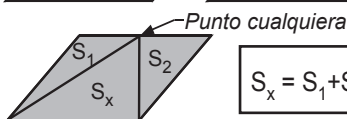
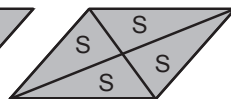
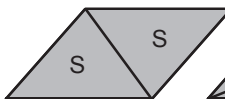
$$S_x = \frac{S_1 + S_2}{2} = \frac{S_T}{3}$$

En paralelogramos



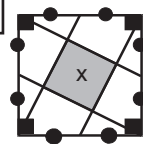
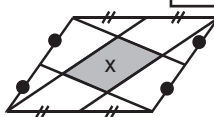
$$S_x = b \cdot h$$

$$S_x = B \cdot h$$

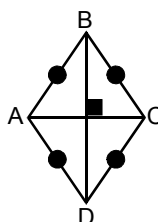


$$S_x = S_1 + S_2 = \frac{S_T}{2}$$

$$x = \frac{S_T}{5}$$



Rombo

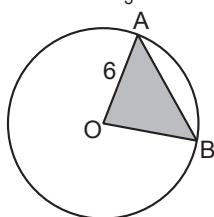


$$S_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2}$$

GEOMETRÍA

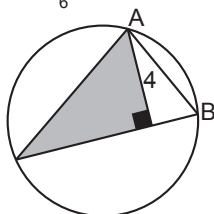
PROBLEMAS APLICATIVOS

1. Calcule el área de la región triangular BOA. Si: $AB=L_3$



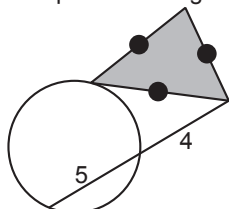
- a) $8\sqrt{3}$
b) $12\sqrt{3}$
c) $2\sqrt{3}$
d) $9\sqrt{3}$
e) $3\sqrt{3}$

2. Calcule el área de la región sombreada, $AB=L_6$



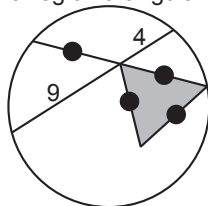
- a) $2\sqrt{3}$
b) $8\sqrt{3}$
c) $6\sqrt{3}$
d) $12\sqrt{3}$
e) $15\sqrt{3}$

3. Calcule el área de la región sombreada. Si A es punto de tangencia.



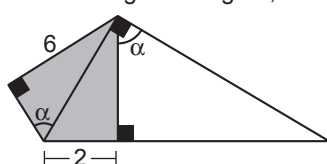
- a) $9\sqrt{3}$
b) $12\sqrt{3}$
c) $4\sqrt{3}$
d) $5\sqrt{3}$
e) $6\sqrt{3}$

4. En la siguiente figura, calcule el área de la región triangular.



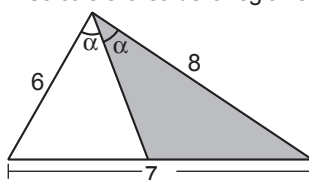
- a) $12\sqrt{3}$
b) $6\sqrt{3}$
c) $3\sqrt{3}$
d) $9\sqrt{3}$
e) $18\sqrt{3}$

5. En la siguiente figura, calcule "a".



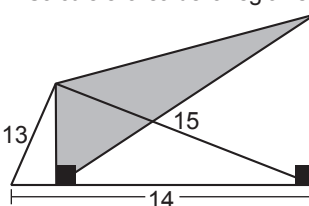
- a) 8
b) 9
c) 24
d) 10
e) 12

6. Calcule el área de la región sombreada.



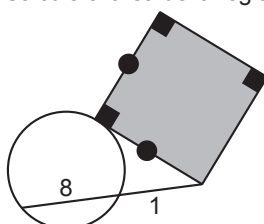
- a) $8\sqrt{3}$
b) $6\sqrt{2}$
c) 36
d) $2\sqrt{6}$
e) $3\sqrt{15}$

7. Calcule el área de la región sombreada.



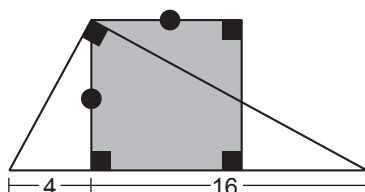
- a) 36
b) 48
c) 54
d) 72
e) 63

8. Calcule el área de la región cuadrada.



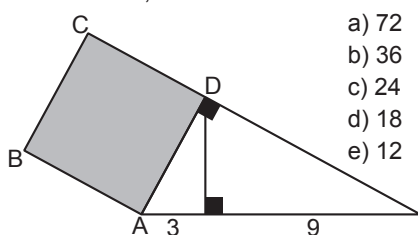
- a) 12
b) 25
c) 16
d) 36
e) 9

9. Calcule el área de la región cuadrada.



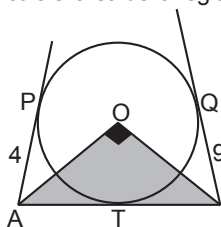
- a) 128
b) 48
c) 28
d) 64
e) 32

10. Calcule el área de la región rectangular ABCD, si $AD=2AB$.



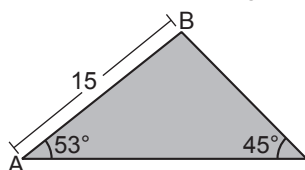
- a) 72
b) 36
c) 24
d) 18
e) 12

11. Calcule el área de la región sombreada.



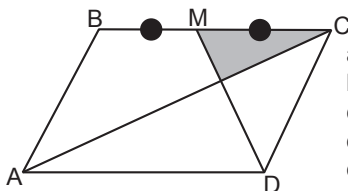
- a) 36
- b) 18
- c) 24
- d) 72
- e) 39

12. Calcule el área de la región sombreada.



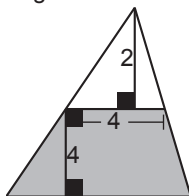
- a) 96
- b) 84
- c) 108
- d) 134
- e) 126

13. Calcule el área de la región sombreada. Si el área del romboide ABCD es 120 m^2 .



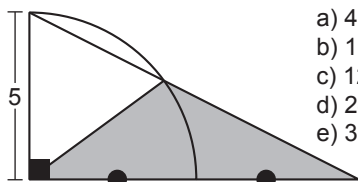
- a) 8
- b) 6
- c) 12
- d) 10
- e) 4

14. En la siguiente figura, calcule el área de la región sombreada.



- a) 16
- b) 24
- c) 28
- d) 64
- e) 32

15. Calcule el área de la región sombreada.



- a) 48
- b) 15
- c) 12
- d) 24
- e) 36

PROBLEMAS PROPUESTOS

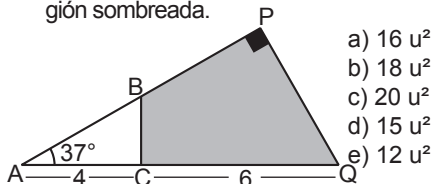
1. Calcular el área de una región triangular ABC, donde $AB=10u$; $AC=12u$ y $m \angle A=30^\circ$.

- a) $30 u^2$
- b) $45 u^2$
- c) $48 u^2$
- d) $60 u^2$
- e) $75 u^2$

2. Si el perímetro de un triángulo rectángulo es $36u$, calcular el área correspondiente si un ángulo mide 37° .

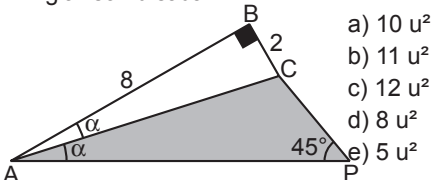
- a) $36 u^2$
- b) $48 u^2$
- c) $54 u^2$
- d) $86 u^2$
- e) $108 u^2$

3. En la figura, calcular el área de la región sombreada.



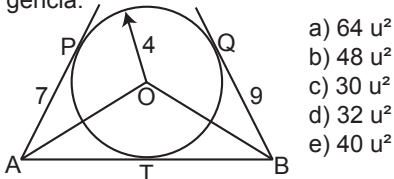
- a) $16 u^2$
- b) $18 u^2$
- c) $20 u^2$
- d) $15 u^2$
- e) $12 u^2$

4. En la figura, calcular el área de la región sombreada.



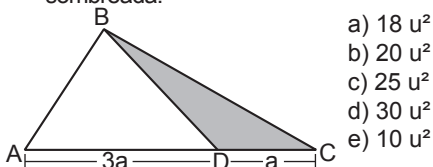
- a) $10 u^2$
- b) $11 u^2$
- c) $12 u^2$
- d) $8 u^2$
- e) $5 u^2$

5. Calcular el área de la región sombreada, si O es centro de la circunferencia y T, P y Q son puntos de tangencia.



- a) $64 u^2$
- b) $48 u^2$
- c) $30 u^2$
- d) $32 u^2$
- e) $40 u^2$

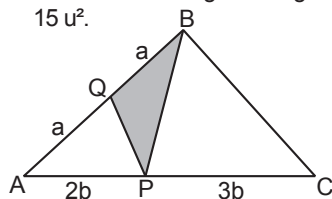
6. Si el área de la región triangular ABC es 80 m^2 . Calcular el área de la región sombreada.



- a) $18 u^2$
- b) $20 u^2$
- c) $25 u^2$
- d) $30 u^2$
- e) $10 u^2$

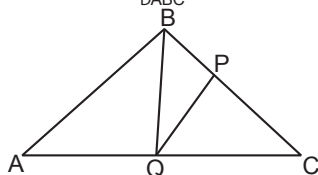
GEOMETRÍA

7. Calcular el área de la región sombreada, si el área de la región triangular PBC es 15 u^2 .



- a) 2 u^2
b) 3
c) 4 u^2
d) 5 u^2
e) 10 u^2

8. Si: $S_{DPQB} = 6 \text{ u}^2$, $PC = 2BP$ y $AQ = QC$.
Calcular: S_{DABC}

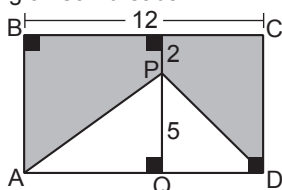


- a) 42 u^2
b) 24 u^2
c) 28 u^2
d) 32 u^2
e) 36 u^2

9. En un romboide ABCD, $AB = 7\sqrt{2}$, $BC = 10$ y la $m \angle A = 45^\circ$. Calcular el área de la región cuadrangular ABCD.

- a) 25 u^2 b) 28 u^2 c) 70 u^2
d) 35 u^2 e) 40 u^2

10. En la figura, calcular el área de la región sombreada.

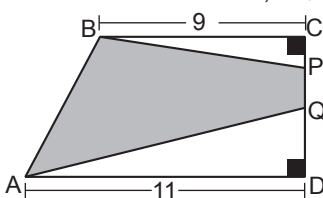


- a) 45 u^2
b) 48 u^2
c) 54 u^2
d) 73 u^2
e) 64 u^2

11. Si el perímetro de un rombo es de 52 u y una de sus diagonales mide 10 u, entonces calcular el área de dicho rombo.

- a) 240 u^2 b) 169 u^2 c) 144 u^2
d) 108 u^2 e) 120 u^2

12. En la figura, calcular el área de la región sombreada. Si: $PC = 2$; $PQ = 3$ y $QD = 4$.

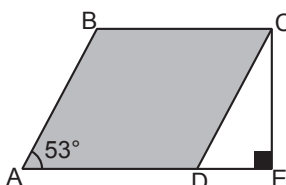


- a) 31 u^2
b) 45 u^2
c) 54 u^2
d) 59 u^2
e) 61 u^2

13. Si las bases de un trapecio miden 7 cm y 13 cm; y la medida de su altura es de igual medida que su base media. Calcular el área de dicho trapecio.

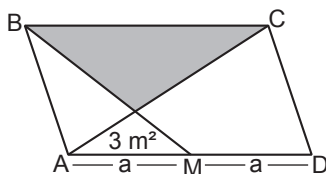
- a) 120 u^2 b) 100 u^2 c) 140 u^2
d) 98 u^2 e) 75 u^2

14. Si ABCD es un rombo y $AE = 24 \text{ u}$. Calcular el área de la región rombal.



- a) 150 u^2
b) 180 u^2
c) 144 u^2
d) 225 u^2
e) 296 u^2

15. En el siguiente paralelogramo ABCD, calcular el área de la región sombreada.



- a) 18 m^2
b) 15 m^2
c) 6 m^2
d) 12 m^2
e) 9 m^2

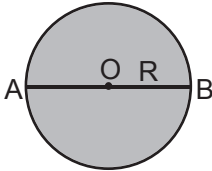
CLAVES

1.d	2.b	3.a	4.d	5.e
6.e	7.c	8.e	9.d	10.d
11.e	12.e	13.d	14.e	15.b
1.a	2.c	3.b	4.a	5.d
6.b	7.d	8.e	9.c	10.c
11.e	12.d	13.b	14.b	15.d

Áreas II

Área de regiones circulares

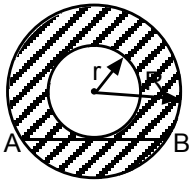
Del círculo



$$S = \pi R^2$$

$$S = \frac{\pi(AB)^2}{4}$$

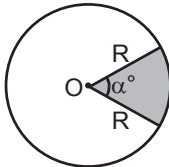
Corona circular



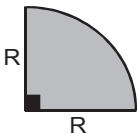
$$S = \pi(R^2 - r^2)$$

$$S = \frac{\pi(AB)^2}{4}$$

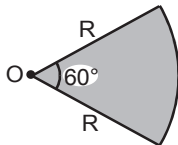
Sector circular



$$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360}$$



$$S = \frac{\pi R^2}{4}$$

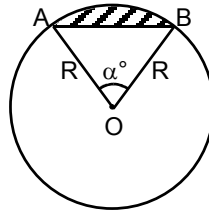


$$S = \frac{\pi R^2}{6}$$

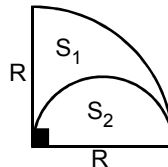
Segmento circular

$$S = \text{Sector} - \text{Triangle}$$

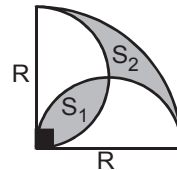
$$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360} - \frac{R^2 \text{Sen} \alpha}{2}$$



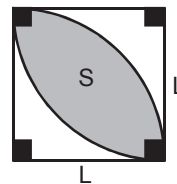
Propiedades



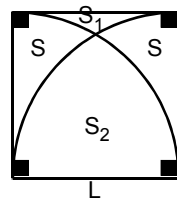
$$S_1 = S_2 = \frac{S_T}{2}$$



$$S_1 = S_2 = \left(\frac{\pi - 2}{8} \right) R^2$$



$$S = \left(\frac{\pi - 2}{2} \right) L^2$$

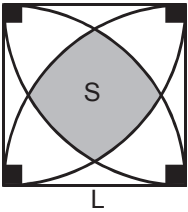


$$S = \left(\frac{3\sqrt{3} + \pi}{12} \right) L^2$$

$$S_1 = \left(\frac{12 - 3\sqrt{3} - 2\pi}{12} \right) L^2$$

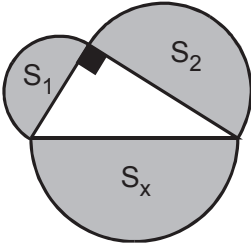
$$S_2 = \left(\frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{12} \right) L^2$$

GEOMETRÍA

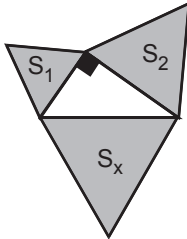
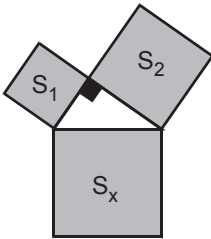


$$S = \left(\frac{\pi + 3 - 3\sqrt{3}}{3} \right) L^2$$

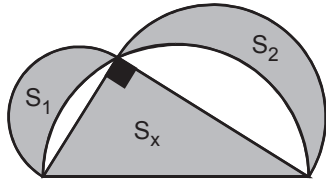
Regiones semejantes



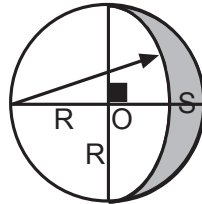
$$S_x = S_1 + S_2$$



Lúnulas de Hipócrates



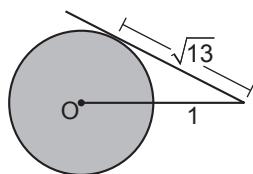
$$S_x = S_1 + S_2$$



$$S = R^2$$

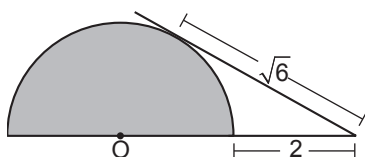
PROBLEMAS APLICATIVOS

1. En la siguiente figura, calcule el área de la región sombreada.



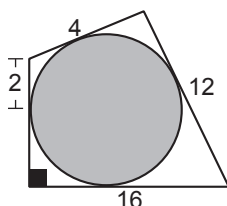
- a) 12p
b) 36p
c) 72p
d) 24p
e) 18p

2. Calcule el área de la región sombreada.



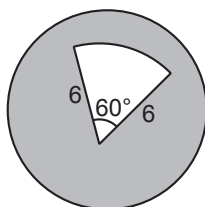
- a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{\pi}{12}$ c) $\frac{\pi}{6}$
d) $\frac{\pi}{4}$ e) $\frac{\pi}{8}$

3. Calcule el área de la región sombreada.



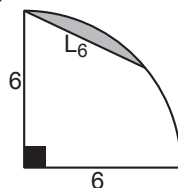
- a) 24p
b) 72p
c) 18p
d) 25p
e) 36p

4. Calcule el área de la región sombreada, si los radios de la circunferencia y del sector son congruentes.



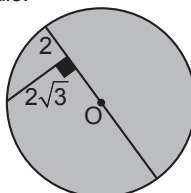
- a) 20p
b) 50p
c) 30p
d) 80p
e) 10p

5. Calcule el área de la región sombreada. Si: L_6 : Lado del hexágono regular.



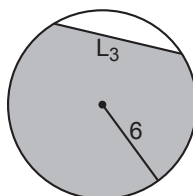
- a) $6p-9\sqrt{3}$ b) $2p-7\sqrt{3}$ c) $p-\sqrt{2}$
d) $3p-\sqrt{3}$ e) $p-\sqrt{3}$

6. En la siguiente figura, calcule el área del círculo.



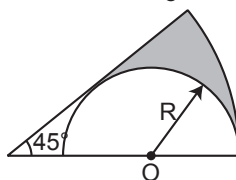
- a) 8p
b) 14p
c) 18p
d) 12p
e) 16p

7. En la siguiente figura, calcule el área de la región sombreada.



- a) $24p+9\sqrt{3}$ b) $12p+8\sqrt{3}$ c) $6p+4\sqrt{3}$
d) $4p+2\sqrt{3}$ e) $2p+\sqrt{3}$

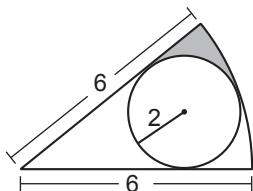
8. Calcule el área de la región sombreada.



- a) $R^2(p-2)$ b) $R^2(p-\sqrt{2})$ c) $R^2(2p-2)$
d) $R^2(\sqrt{2}p-4)$ e) $\frac{R^2}{4}(\sqrt{2}p-2)$

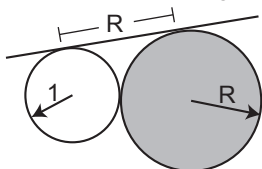
GEOMETRÍA

9. Calcule el área de la región sombreada.



- a) $\frac{5\pi - 2\sqrt{3}}{3}$ b) $(3\pi - \sqrt{3})$ c) $(4\pi - \sqrt{3})$
d) $(6\pi - \sqrt{3})$ e) $(7\pi - 3\sqrt{3})$

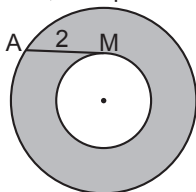
10. Calcule el área de la región sombreada.



- a) 18p
b) 25p
c) 64p
d) 12p
e) 16p

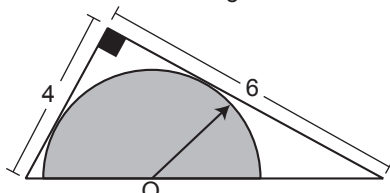
11. Calcule el área de la corona circular.

Si: $AM=2$, M es punto de tangencia.



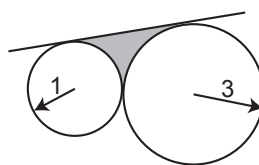
- a) 4p
b) 2p
c) 16p
d) 8p
e) 12p

12. Calcule el área de la región sombreada.



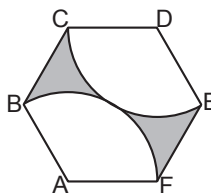
- a) p 2,88 b) p 1,44 c) p 1,32
d) p 1,64 e) p 2,32

13. En la figura, calcule el área de la región sombreada.



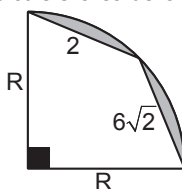
- a) $\frac{(24\sqrt{6} - 11\pi)}{3}$
b) $\frac{(3\pi - 2)}{3}$
c) $(4\pi - 11)3$
d) $\frac{4\sqrt{6} - 11\pi}{4}$
e) $2\sqrt{6} - p$

14. Calcule el área de la región sombreada. Si: ABCDEF es un hexágono regular de lado igual a 6.



- a) $3(18\sqrt{2} - 8p)$
b) $(18\sqrt{2} - 8p)$
c) $6\sqrt{2} - 4p$
d) $4\sqrt{2} - p$
e) $3\sqrt{2} - p$

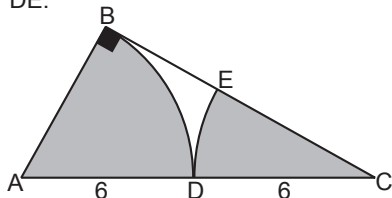
15. Calcule el área de la región sombreada.



- a) 25p-62
b) 35p-48
c) 15p-16
d) 45p-32
e) 42p-36

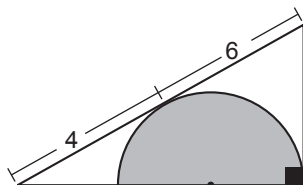
PROBLEMAS PROPUESTOS

1. En la figura, calcular la suma de áreas de las regiones sombreadas si A y C son centros de los arcos BD y DE.



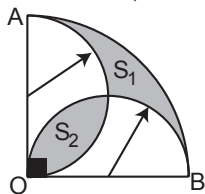
- a) 10p b) 8p c) 9p
d) 11p e) 12p

2. En la figura, calcular el área del semicírculo.



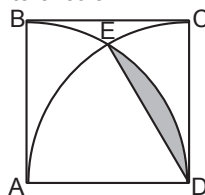
- a) $\frac{7\pi}{2}$ b) $\frac{9\pi}{2}$ c) $\frac{8\pi}{3}$
d) 4p e) 5p

3. En el cuadrante AOB, calcular: $\left(\frac{S_1}{S_2}\right)$



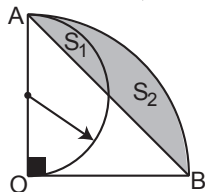
- a) 1 b) 1/2 c) 2/3
d) 3/4 e) 2/5

4. En la figura ABCD es un cuadrado de lado 6. A y D son centros de los arcos BD y AC. Calcular el área del segmento circular.



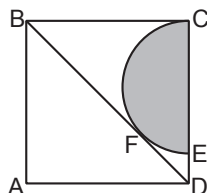
- a) $6p - 9\sqrt{3}$ b) $6p - 3\sqrt{3}$ c) $8p - 2\sqrt{3}$
d) $8p - 3\sqrt{3}$ e) $6p - 2\sqrt{3}$

5. En el cuadrante AOB, calcular: $\left(\frac{S_1}{S_2}\right)$



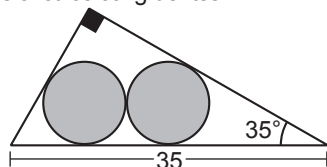
- a) 1/4 b) 1 c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
d) 1/3 e) 2/5

6. Calcule el área del semicírculo, si ABCD es un cuadrado de lado $(2 + \sqrt{2})$



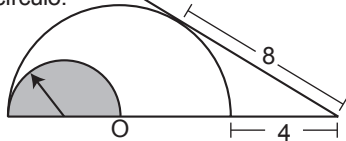
- a) p b) 3p c) 4p
d) 2p e) 5p

7. En la figura, calcular el área de uno de los círculos congruentes.



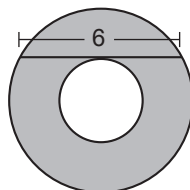
- a) 49p b) 25p c) 16p
d) 81p e) 4p

8. En la figura, calcular el área del semicírculo.



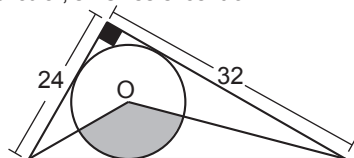
- a) 2p b) 8p c) $9p/2$
d) 5p e) 20p

9. En la figura, calcular el área de la corona circular.



- a) 8p b) 9p c) 10p
d) 12p e) 6p

10. En la figura calcular el área del sector circular, si "O" es el centro.



- a) 24p b) 30p c) 12p
d) 36p e) 50p

11. Calcular el área de un círculo cuyo diámetro mide "x".

- a) $\frac{\pi x^2}{2}$ b) $\frac{\pi x^2}{3}$ c) $\frac{\pi x^2}{4}$
d) $\frac{\pi x^2}{5}$ e) $\frac{\pi x^2}{6}$

GEOMETRÍA

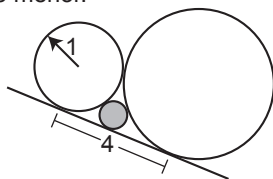
12. Los catetos de un triángulo rectángulo miden 8 y 15. Calcular el área del círculo inscrito.

- a) 16p b) 25p c) 36p
d) 4p e) 9p

13. Calcular el área del segmento circular relativo a un lado de un cuadrado inscrito en una circunferencia de radio 2.

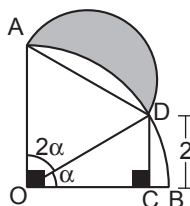
- a) $p-2$ b) $p-1$ c) $p-3$
d) $2p-3$ e) $2p-4$

14. En la figura, calcular el área del círculo menor.



- a) $\frac{9\pi}{13}$ b) $\frac{16\pi}{81}$ c) $\frac{12\pi}{61}$
d) $\frac{19\pi}{27}$ e) $\frac{13\pi}{24}$

15. En el cuadrante AOB, calcular el área de la región sombreada.



- a) $3p-1$ b) $2p-2$ c) $5p-2$
d) $6p-4$ e) $\frac{4(4\pi - 3\sqrt{3})}{3}$

CLAVES

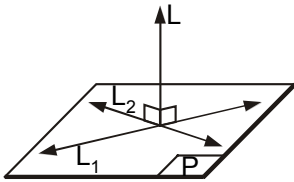
1.b	2.e	3.e	4.c	5.a
6.e	7.a	8.e	9.a	10.e
11.a	12.a	13.a	14.a	15.a
1.c	2.b	3.a	4.a	5.d
6.a	7.b	8.c	9.b	10.a
11.c	12.e	13.a	14.b	15.e

Geometría del Espacio

GEOMETRÍA DEL ESPACIO. Denominada también **Esterenometría**, estudia todas las propiedades en Geometría Plana, y aplicadas en planos diferentes.

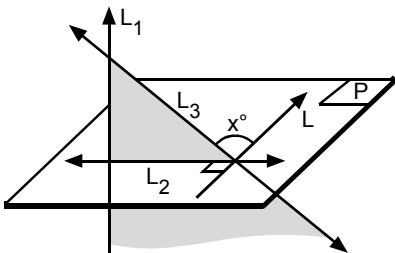
ESPACIO. El espacio geométrico euclidiano es el conjunto de infinitos puntos continuos, uniforme, capaz de representar todo objeto que nos rodea.

RECTA PERPENDICULAR A UN PLANO



Si: $\begin{matrix} L & L_1 \\ y & \\ L & L_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} L & P \end{matrix}$

TEOREMA DE LAS TRES PERPENDICULARES



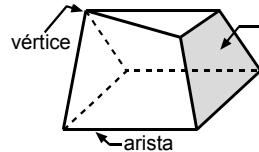
Si: $\begin{matrix} L_1 & P \\ y & \\ L_2 & L \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} L_3 & L \end{matrix}$

$$\therefore x = 90^\circ$$

POLIEDROS REGULARES (cuerpos platónicos)

Nombre	Caras	Vértices	Aristas
Tetraedro	4	4	6
Exaedro	6	8	12
Octaedro	8	6	12
Dodecaedro	12	20	30
Icosaedro	20	12	30

TEOREMA DE EULER:



$$V + C = A + 2$$

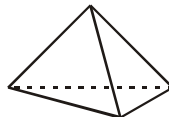
Donde:

V : Vértices

C : Caras

A : Aristas

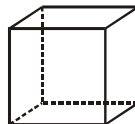
TETRAEDRO REGULAR



$$A = a^2 \sqrt{3}$$

$$V = \frac{a^3}{12} \sqrt{2}$$

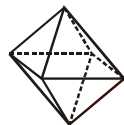
EXAEDRO REGULAR



$$A = 6a^2$$

$$V = a^3$$

OCTAEDRO REGULAR



$$A = 2a^2 \sqrt{3}$$

$$V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{3}$$

DODECAEDRO REGULAR

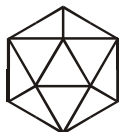


$$A = 15a^2 \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$$

$$V = \frac{5a^3}{2} \sqrt{\frac{47+21\sqrt{5}}{10}}$$

GEOMETRÍA

ICOSAEDRO REGULAR

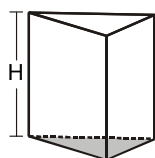


$$A = 5a^2\sqrt{3}$$

$$V = \frac{5a^3}{6} \sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}}$$

Sólidos Geométricos

1. Prisma recto

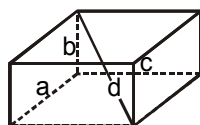


$$A_{LAT} = 2P_{BASE} \times H$$

$$A_{TOT} = A_{LAT} + 2A_{BASE}$$

$$Vol = A_{BASE} \times H$$

Paralelepípedo rectangular, rectoedro u ortoedro

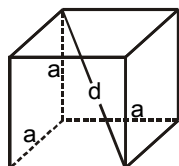


$$A_{TOT} = 2(ab+bc+ac)$$

$$Vol = abc$$

$$d^2 = a^2+b^2+c^2$$

Exaedro regular o cubo



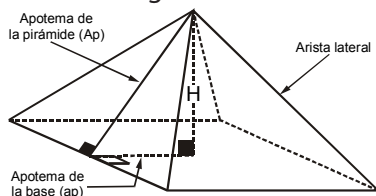
$$A_{LAT} = 4a^2$$

$$A_{TOT} = 6a^2$$

$$Vol = a^3 = \frac{d^3\sqrt{3}}{9}$$

$$d = a\sqrt{3}$$

2. Pirámide regular

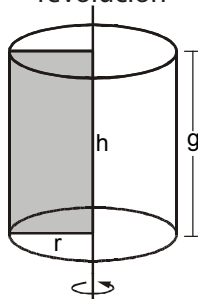


$$A_{LAT} = P_{BASE} \times Ap$$

$$A_{TOT} = A_{LAT} + A_{BASE}$$

$$Vol = \frac{A_{BASE} \times H}{3}$$

3. Cilindro circular recto o de revolución



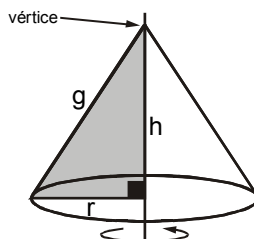
$$A_{LAT} = 2\pi rg$$

$$A_{TOT} = 2\pi rg + 2\pi r^2$$

$$A_{TOT} = 2\pi r(g+r)$$

$$Vol = \pi r^2 g$$

4. Cono circular recto o de revolución

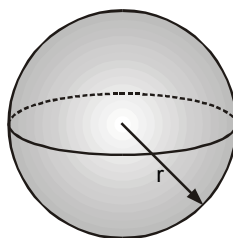


$$A_{LAT} = \pi rg$$

$$A_{TOT} = \pi rg + \pi r^2$$

$$Vol = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

5. Esfera



$$A_{SE} = 4\pi r^2$$

$$Vol = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$Vol = \frac{\pi D^3}{6}$$

Donde:

D = diámetro

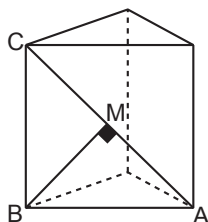
A_L = Área Lateral

A_T = Área Total

V = Volumen

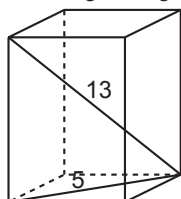
PROBLEMAS APLICATIVOS

1. Calcule el volumen del prisma triangular regular. Si $AM=4$ y $MC=5$.



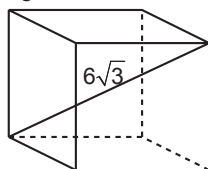
- a) $24\sqrt{3}$
b) $27\sqrt{15}$
c) $13\sqrt{5}$
d) $8\sqrt{3}$
e) $6\sqrt{2}$

2. Calcule el volumen del prisma cuadrangular regular.



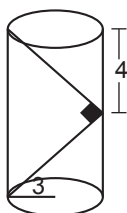
- a) 120
b) 150
c) 130
d) 140
e) 160

3. Calcule el volumen del cubo o hexaedro regular.



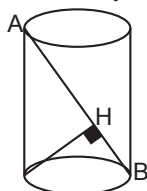
- a) 216
b) 524
c) 360
d) 248
e) 480

4. Calcule el volumen del cilindro circular recto.



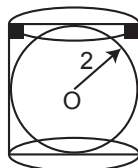
- a) 168p
b) 256p
c) 164p
d) 124p
e) 117p

5. Calcule el volumen del cilindro circular recto. Si: $AH=8$ y $HB=1$



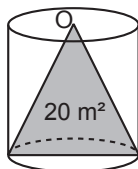
- a) $6\sqrt{2}$
b) $3\sqrt{7}$
c) $7\sqrt{3}$
d) $27\sqrt{2}$
e) $\frac{27\sqrt{2}}{2}$

6. Calcule el volumen del cilindro circular.



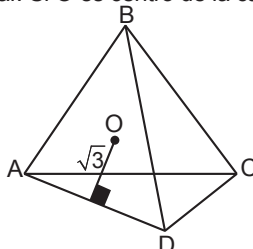
- a) 64p
b) 36p
c) 24p
d) 16p
e) 12p

7. Calcule el área de la superficie lateral del cilindro circular recto.



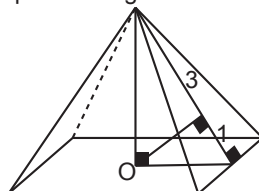
- a) 40p
b) 20p
c) 10p
d) 60p
e) 80p

8. Calcule el volumen del tetraedro regular. Si O es centro de la cara ABD.



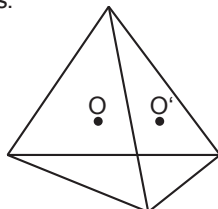
- a) $18\sqrt{2}$
b) $36\sqrt{2}$
c) $18\sqrt{3}$
d) $54\sqrt{3}$
e) $54\sqrt{2}$

9. Calcule el área de la superficie lateral de la pirámide regular.



- a) 62
b) 28
c) 64
d) 16
e) 32

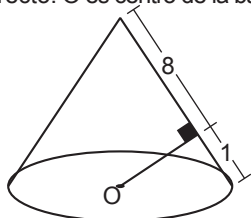
10. Calcule el volumen del tetraedro regular, si: $OO'=6$; O y O' son centros de las caras.



- a) $486\sqrt{2}$
b) $243\sqrt{2}$
c) $546\sqrt{2}$
d) $576\sqrt{2}$
e) $128\sqrt{2}$

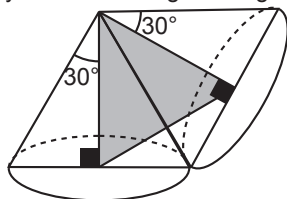
GEOMETRÍA

11. Calcule el volumen del cono circular recto. O es centro de la base.



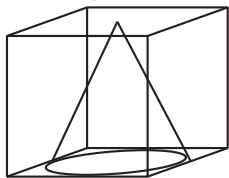
- a) $\sqrt{7}p$
b) $\sqrt{5}p$
c) $2\sqrt{5}p$
d) $\sqrt{10}p$
e) $3\sqrt{10}p$

12. Calcule el volumen de uno de los dos conos circulares rectos, si son congruentes y el área de la región triangular es $9\sqrt{3}$.



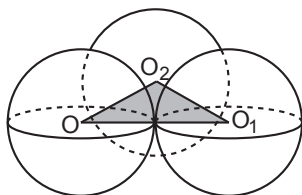
- a) 81p
b) 36p
c) 16p
d) 12p
e) 24p

13. Calcule la relación entre los volúmenes del cubo y el cono circular recto.



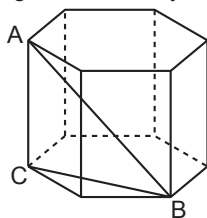
- a) $\frac{36}{\pi}$
b) $\frac{24}{\pi}$
c) $\frac{16}{\pi}$
d) $\frac{12}{\pi}$
e) $\frac{18}{\pi}$

14. Si el perímetro de la región sombreada es 18. Calcule el volumen de una de las esferas congruentes que son tangentes dos a dos.



- a) 12p
b) 36p
c) 18p
d) 54p
e) 64p

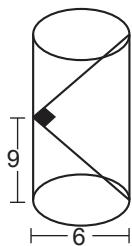
15. Calcule el volumen del prisma regular hexagonal. Si: $AB=4$ y $m \angle ABC=30^\circ$



- a) $8\sqrt{3}$
b) $18\sqrt{3}$
c) $36\sqrt{3}$
d) $12\sqrt{3}$
e) $16\sqrt{3}$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Calcule el volumen del cilindro circular recto.



- a) 120p
b) 110p
c) 106p
d) 117p
e) 115p

2. Calcule el radio de la base de un cilindro circular recto, si el área lateral es igual al área de su base y su volumen es 108p.

- a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

3. El desarrollo de la superficie total de un prisma regular cuadrangular es una región cuadrada de lado 8. Calcule su volumen.

- a) 36
b) 32
c) 28
d) 24
e) 48

4. El desarrollo de un prisma recto es una región rectangular de diagonal 17 y altura 8. Si su base está limitada por un triángulo equilátero, calcule su volumen.

- a) $50\sqrt{3}$
b) $25\sqrt{3}$
c) $5\sqrt{3}$
d) $8\sqrt{3}$
e) $16\sqrt{3}$

5. En una pirámide regular hexagonal se conoce que el área lateral es el doble del área de la base, el circunradio de la base mide 2. Calcule su volumen de dicha pirámide.

a) $4\sqrt{3}$ b) $6\sqrt{3}$ c) $8\sqrt{3}$
d) $12\sqrt{3}$ e) $16\sqrt{3}$

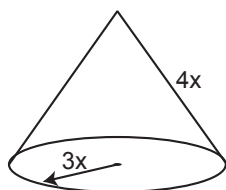
6. Las caras laterales de una pirámide regular tienen una inclinación de 45° con respecto al plano de la base, la cual es un cuadrado inscrito en una circunferencia de radio 1. Calcule el área total.

a) $2(\sqrt{2}-1)$ b) $2(\sqrt{2}+1)$ c) $4(\sqrt{2}-1)$
d) $4(\sqrt{2}+1)$ e) $(\sqrt{2}-1)$

7. Calcule el volumen de un tetraedro regular sabiendo que 2 aristas opuestas distan $2\sqrt{3}$.

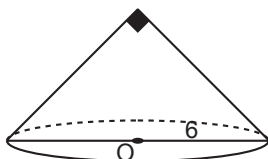
a) $4\sqrt{3}$ b) $6\sqrt{3}$ c) $8\sqrt{3}$
d) $10\sqrt{3}$ e) $12\sqrt{3}$

8. Si el área de la superficie lateral del cono circular recto es 84π . Cuánto mide su altura.



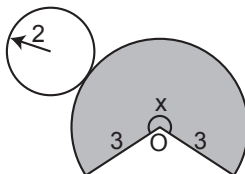
a) 6 b) 9 c) 5
d) 7 e) 4

9. Calcule el volumen del cono circular recto.



a) 36π b) 54π c) 18π
d) 60π e) 72π

10. Se muestra el desarrollo de la superficie total de un cono de vértice O. Calcular "x".

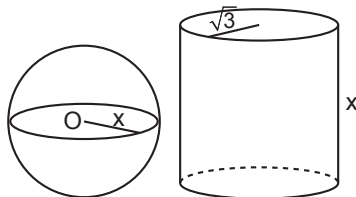


a) 260 b) 240 c) 300
d) 310 e) 210

11. Cuánto mide el radio de una esfera cuyo volumen es igual al triple de la superficie esférica correspondiente.

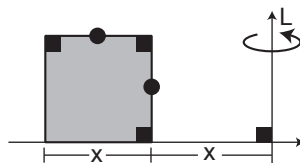
a) 8 b) 9 c) 7
d) 6 e) 4

12. Calcule el valor de "x" si el volumen de la esfera es igual al cuádruple del volumen del cilindro circular recto.



a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

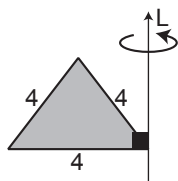
13. Calcule el volumen que se genera al rodear de la recta L.



a) πx^3 b) $2\pi x^3$ c) $3\pi x^3$
d) $4\pi x^3$ e) $5\pi x^3$

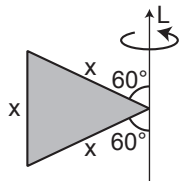
GEOMETRÍA

14. Calcule el volumen del sólido generado.



- a) 8p b) $16p\sqrt{3}$ c) $9p\sqrt{3}$
d) 6p e) 12p

15. Calcule "x", si el volumen generado es 4p.



- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

CLAVES

1.b	2.b	3.a	4.e	5.e
6.d	7.a	8.a	9.e	10.a
11.e	12.e	13.d	14.b	15.d
1.d	2.e	3.b	4.a	5.b
6.b	7.c	8.d	9.e	10.b
11.b	12.c	13.c	14.b	15.b

Geometría Analítica

GEOMETRÍA ANALÍTICA PLANA

René Descartes, matemático francés, en 1637 define una ecuación algebraica para cada figura geométrica; es decir, un conjunto de pares ordenados de números reales $(x; y)$ tal que a cada par se le asocia un punto del plano llamado PLANO CARTESIANO.

Los pares ordenados se obtienen por el producto cartesiano.

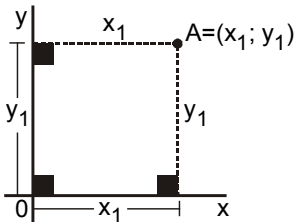
El producto cartesiano es el producto de dos conjuntos.

El producto cartesiano $R \times R$ representa todo el plano cartesiano.

$$R^2 = R \times R = \{(x; y) / x \in R \wedge y \in R\}$$

SISTEMA DE COORDENADAS RECTANGULARES

1. DE UN PUNTO

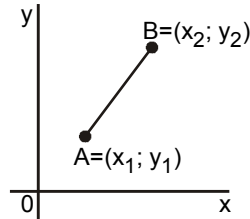


x_1 : Abscisa

y_1 : Ordenada

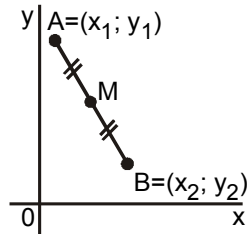
0 : Origen de Coordenadas

2. DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS



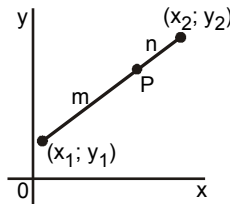
$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

3. PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO



$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

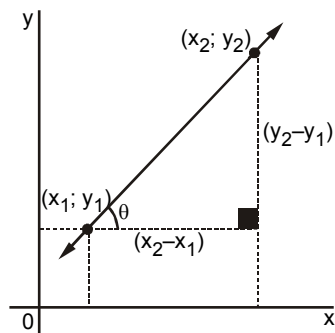
4. PUNTO CUALQUIERA DE UN SEGMENTO



$$P = \left(\frac{x_1 \cdot n + x_2 \cdot m}{m+n}, \frac{y_1 \cdot n + y_2 \cdot m}{m+n} \right)$$

GEOMETRÍA

5. PENDIENTE DE UNA RECTA (m)



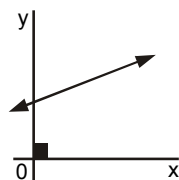
$$m = \text{Tg}\theta$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

m : Pendiente

6. ECUACIÓN DE LA RECTA

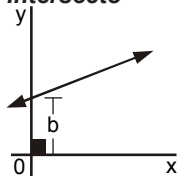
Ec. General



$$Ax + By + C = 0$$

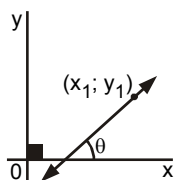
$$m = -\frac{A}{B}$$

Ec. Pendiente Intersecto



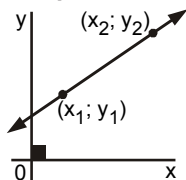
$$y = mx + b$$

Punto-Pendiente



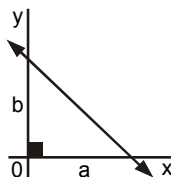
$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Dos puntos



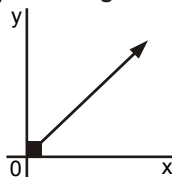
$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ec. Simétrica



$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

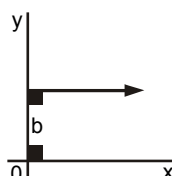
Si: b=0 la recta pasa por el origen



$$y = mx$$

Recta horizontal

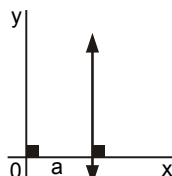
Si: m=0



$$y = b$$

Recta vertical

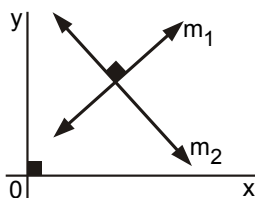
m=No existe



$$x = a$$

7. RECTAS PERPENDICULARES

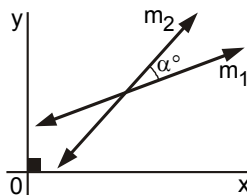
Si una de ellas no es vertical.



$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

8. MEDIDA DEL ÁNGULO QUE FORMAN

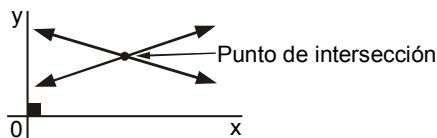
Si una de ellas no es vertical.



$$\text{Tg}\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$$

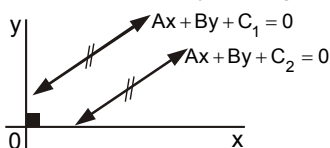
9. RECTAS SECANTES

Las coordenadas del punto de intersección se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones con dos incógnitas.

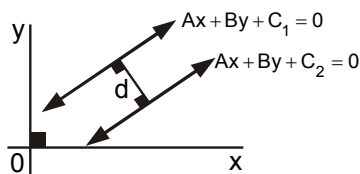


10. RECTAS PARALELAS

Las pendientes iguales indica que los coeficientes de x e y sean iguales.

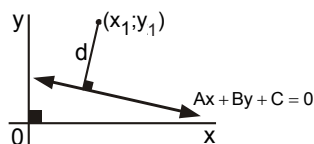


11. MÍNIMA DISTANCIA ENTRE RECTAS PARALELAS



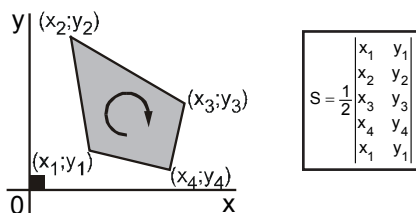
$$d = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

12. MÍNIMA DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA



$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

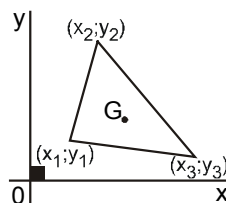
13. ÁREA DE UNA REGIÓN POLIGONAL



$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$

14. BARICENTRO DE UNA REGIÓN TRIANGULAR

Las coordenadas del baricentro de un n-gono es el promedio de las coordenadas de sus n vértices.



$$G = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$$

PROBLEMAS APLICATIVOS

1. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto A(1;5) y tiene pendiente 2.
a) $2x-y+3=0$ b) $x-y+3=0$ c) $3x-y+3=0$
d) $x-2y+2=0$ e) $x-y+1=0$
2. Hallar la ecuación de la recta que pasa por M(2;1) y es paralela a la recta:
 $L_1: 5x+3y-3=0$
a) $y = -\frac{5x}{3} + \frac{13}{3}$
b) $3y = 5x + 9$
c) $x + y = 6$
d) $3x + 5y - 3 = 0$
e) $x - 3y = 10$
3. Hallar la ecuación de la recta que pasa por M(2;1) y es perpendicular a la recta:
 $L_1: 5x + 3y - 3 = 0$
a) $5y=3x-1$ b) $y=x+6$ c) $5x=3y+1$
d) $x=y$ e) $3x=5y$
4. Los vértices de un triángulo son los puntos A(3;6); B(-1;3) y C(2;-1). Calcule la longitud de la altura trazada desde C.
a) 2 b) 3 c) 4
d) 5 e) 6
5. Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento AB. Donde: A(-4;3) y B(2;9)
a) $x+y=3$ b) $y=-x+5$ c) $x+y=12$
d) $x-3y=5$ e) $3x=5y+1$
6. Halle la ecuación de la recta que pasa por el punto A(-6;-3) y tiene un ángulo de inclinación de 45° .
a) $x-y+3=0$ b) $x=y$ c) $x+y+1=0$
d) $x+y-1=0$ e) $3x-y=3$
7. Hallar la ecuación de la recta cuya pendiente es -3 y cuya intersección con el eje y es -2.
a) $3x+y+2=0$ b) $x+y+3=0$ c) $x+y-3=0$
d) $x-y-3=0$ e) $x-y+1=0$
8. Halle la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(4;2) y B(-5;7).
a) $5x + 9y - 38 = 0$
b) $9x + 5y - 19 = 0$
c) $3x + 2y - 10 = 0$
d) $x + y + 5 = 0$
e) $3x + 5y + 10 = 0$
9. Los segmentos que una recta determina sobre los ejes x e y son 2 y -3 respectivamente. Hallar la ecuación.
a) $3x - 2y - 6 = 0$
b) $2x + 3y - 3 = 0$
c) $x + y - 4 = 0$
d) $3x + y + 5 = 0$
e) $2x + 3y + 8 = 0$
10. Una recta pasa por los puntos A(3;-1) y B(2;-6). Halle su ecuación en la forma simétrica.
a) $\frac{x}{-4} + \frac{y}{-4} = 1$ b) $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$
c) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ d) $\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$
e) $\frac{x}{3} - \frac{y}{5} = 1$
11. Una recta de pendiente -2 pasa por el punto A(-1;4). Halle su ecuación en la forma simétrica.
a) $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} = 1$ b) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ c) $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1$
d) $\frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 1$ e) $\frac{x}{-2} + \frac{y}{-3} = 1$
12. Halle la ecuación de la mediatriz del segmento A(-3;2); B(1;6).
a) $x+y-3=0$ b) $x-y+3=0$ c) $x+y+6=0$
d) $x+y-6=0$ e) $x=y$
13. Hallar la ecuación de la recta bisectriz del ángulo agudo que forman las rectas.
 $L_1: 3x - 4y + 6 = 0$
 $L_2: 24x - 7y - 177 = 0$
a) $13x - 9y - 49 = 0$
b) $3x - 9y + 49 = 0$
c) $12x - 4y - 9 = 0$
d) $3x - 5y + 19 = 0$
e) $x - 5y + 18 = 0$

14. Una recta pasa por el punto $A(7;8)$ y es paralela a la recta que pasa $C(-2;2)$ y $D(3;-4)$. Hallar su ecuación.

- a) $6x + 5y - 82 = 0$
b) $3x + 5y - 42 = 0$
c) $2x + 5y - 21 = 0$
d) $x + 3y + 42 = 0$
e) $5x + y + 21 = 0$

15. Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento que los ejes de coordenadas. Determinan en la recta.

- $L_1: 5x + 3y - 15 = 0$
a) $3x - 5y + 8 = 0$
b) $3x + 5y - 8 = 0$
c) $x + y - 4 = 0$
d) $3x + y + 12 = 0$
e) $x + 3y - 12 = 0$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Calcular la pendiente de la bisectriz del ángulo formado por las rectas:

$L_1: 3y + 4x - 2 = 0$
 $L_2: 4y - 3x - 11 = 0$

- a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{7}$ c) 7
d) $-\frac{1}{7}$ e) -7

2. Determinar la ecuación de la recta con pendiente positiva que pasa por $(0;1)$ y que forma un ángulo de 45° y que forma un ángulo de 45° con la recta:

$3x + 2y - 1 = 0$

- a) $y - 5x - 1 = 0$
b) $y + 5x - 1 = 0$
c) $y + 5x + 1 = 0$
d) $y + 5x - 10 = 0$
e) $5y - x - 1 = 0$

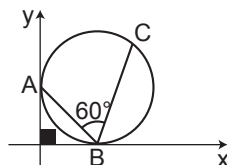
3. Determinar la distancia entre las rectas paralelas:

$L_1: 2x + ay - 4 = 0$

$L_2: (a+1)x + y + 1 = 0$

- a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt{2}$ c) $2\sqrt{5}$
d) $2\sqrt{2}$ e) $3\sqrt{2}$

4. Calcule la pendiente de la recta $\vec{L}$ tangente en C a la circunferencia A y B son puntos de tangencia.

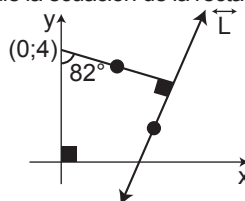


- a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{3}/3$ c) $-\sqrt{3}/3$
d) 2 e) 3

5. Calcule la ecuación de la recta que pasa por $(4;6)$ y pendiente -3.

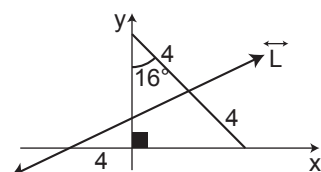
- a) $3x - y - 20 = 0$
b) $2x - y - 16 = 0$
c) $3x + y - 18 = 0$
d) $x + y - 20 = 0$
e) $x - y - 10 = 0$

6. Calcule la ecuación de la recta $\vec{L}$.



- a) $6x - y - 21 = 0$
b) $x - 7y - 21 = 0$
c) $x + y - 21 = 0$
d) $7x - y - 21 = 0$
e) $7x - y + 21 = 0$

7. Hallar la ecuación de la recta $\vec{L}$.

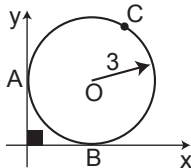


- a) $3x - 4y + 12 = 0$
b) $3x - 4y - 12 = 0$
c) $x - y + 12 = 0$
d) $3x + 4y + 12 = 0$
e) $x + y - 12 = 0$

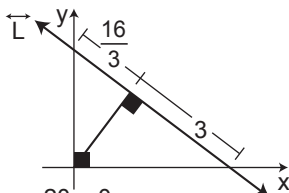
GEOMETRÍA

8. En el plano cartesiano A y B son puntos de tangencia. Calcule la ecuación de la recta tangente a la circunferencia en C; $m\widehat{AC} = 106^\circ$.

- a) $x + y - 8 = 0$
b) $x + y - 1 = 0$
c) $7x + 20y - 1 = 0$
d) $x - y - 7 = 0$
e) $7x + 24y - 168 = 0$

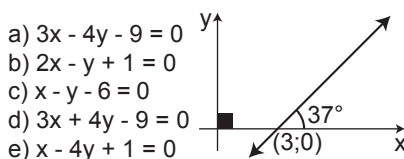


9. Calcule la ecuación de la recta $\vec{L}$.



- a) $x + y - 20 = 0$
b) $4x + 3y - 20 = 0$
c) $4x - y - 20 = 0$
d) $x + y - 1 = 0$
e) $x - y + 6 = 0$

10. Calcule la ecuación de la recta $\vec{L}$.



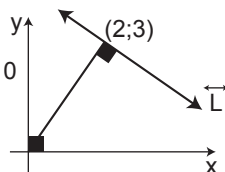
- a) $3x - 4y - 9 = 0$
b) $2x - y + 1 = 0$
c) $x - y - 6 = 0$
d) $3x + 4y - 9 = 0$
e) $x - 4y + 1 = 0$

11. Calcule la ecuación de la recta que pasa por los puntos (1;4) y (4;2).

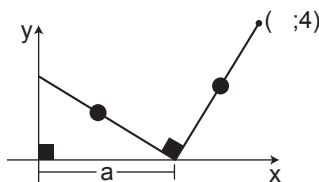
- a) $2x + 3y - 14 = 0$
b) $3x + 2y - 14 = 0$
c) $3x - 2y + 14 = 0$
d) $3x - 2y - 14 = 0$
e) $x - 2y + 14 = 0$

12. Calcule la ecuación de la recta $\vec{L}$.

- a) $x + y - 6 = 0$
b) $2x + 3y - 6 = 0$
c) $x + y + 6 = 0$
d) $x - y - 6 = 0$
e) $x + y - 6 = 0$



13. Calcule "a".



- a) 1
b) 3
c) 5
d) 2
e) 4

14. Dados los vértices de un triángulo ABC, $A=(6;0)$; $B=(0;6)$; y $C=(7;7)$. Calcule las coordenadas del incentro.

- a) (2;2) b) $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ c) $(\frac{7}{2}, \frac{7}{2})$
d) (4;4) e) $(\frac{9}{2}, \frac{9}{2})$

15. En un triángulo ABC tiene por vértices $A=(-1;3)$; $B=(5;5)$ y $C=(3;3)$. Determinar las coordenadas del baricentro.

- a) $(\frac{32}{11}, \frac{14}{11})$ b) (1;4) c) $(\frac{16}{11}, \frac{14}{11})$
d) (4;1) e) $(\frac{7}{3}, \frac{11}{3})$

CLAVES

1.a	2.a	3.a	4.d	5.b
6.a	7.a	8.a	9.a	10.a
11.a	12.a	13.a	14.a	15.a
1.b	2.a	3.a	4.c	5.c
6.d	7.a	8.e	9.b	10.a
11.a	12.b	13.e	14.e	15.e