

PRESENTACIÓN

El Razonamiento Matemático forma parte de la prueba de Aptitud Académica. El término Aptitud se refiere a la capacidad o potencial que tiene una persona para realizar una acción o tarea.

Dicha prueba evalúa las potencialidades del estudiante para realizar estudios superiores y para aplicar los conocimientos generales adquiridos anteriormente a situaciones como las que encontrará en sus estudios universitarios; es decir, evalúa habilidades intelectuales básicas como la comprensión de lectura, la aptitud para relacionar conceptos, la asimilación de significados y el razonamiento lógico y matemático.

También evalúa otras habilidades específicas, necesarias para ubicar e interpretar la información previamente recibida, poniendo especial énfasis a favor de procedimientos en los que el estudiante desempeñe un papel más activo, sobre la base del ejercicio intelectual realizado en su instrucción primaria y secundaria, restando importancia a la simple memorización. Así, la prueba permite tener un índice del rendimiento intelectual del estudiante en el sentido del manejo que realiza de sus recursos (aptitudes y conocimientos) y del empleo de conceptos en situaciones teóricas y prácticas. Por ello, el trabajo intelectual centrado en el estudio de los cursos escolares es de vital importancia en el desarrollo de la Aptitud Académica, la cual está relacionada con el ejercicio de las disciplinas estudiadas.

Un serio conocimiento de las materias básicas asimiladas a través de los años de estudio es la mejor garantía de un buen rendimiento en el examen de ingreso. Además del estudio y el conocimiento teórico de dichas materias, el estudiante deberá relacionar estos conocimientos con la realidad mediante la observación atenta e inteligente del mundo que lo rodea.

Índice

UNIDAD 1	Razonamiento Inductivo–Deductivo	3
UNIDAD 2	Razonamiento Lógico	10
UNIDAD 3	Métodos Aritméticos Especiales	21
UNIDAD 4	Planteo de Ecuaciones	32
UNIDAD 5	Edades	39
UNIDAD 6	Móviles	45
UNIDAD 7	Cronometría	55
UNIDAD 8	Operadores Matemáticos	68
UNIDAD 9	Sucesiones	75
UNIDAD 10	Series	78
UNIDAD 11	Fracciones	85
UNIDAD 12	Tanto por Ciento	97
UNIDAD 13	Áreas de Regiones Sombreadas	104
UNIDAD 14	Análisis Combinatorio	114
UNIDAD 15	Probabilidades	122
UNIDAD 16	Psicotécnico	128

Razonamiento Inductivo–Deductivo

Objetivos

1. Darse cuenta que aplicando un razonamiento previo a un problema (inductivo o deductivo), la resolución de éste puede ser más sencillo.
2. Aprender a relacionar los conceptos adquiridos en este capítulo a hechos de la vida diaria.

Introducción

El uso de la lógica inductiva y deductiva es una de las principales formas de encarar la mayoría de problemas. Debido a que el proceso de resolución es bastante práctico, tiene una aplicación concreta y objetiva en las situaciones que afrontamos en nuestra vida diaria; por ejemplo, nuestros antepasados utilizaron experiencias particulares para anticiparse a programar sus sembríos o cosechas en épocas de lluvia.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Calcular "E" y dar como respuesta la suma de cifras del resultado.

$$E = \underbrace{(333 \dots 333)}_{200 \text{ cifras}}^2$$

Resolución

$$* (33)^2 = 1089$$

$$* (333)^2 = 110889$$

$$* (3333)^2 = 11108889$$

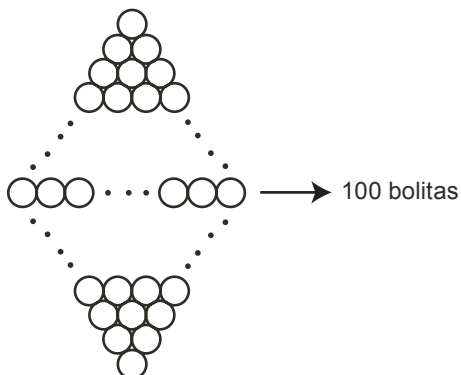
Luego:

$$\underbrace{(333 \dots 3)}_{200 \text{ cifras}}^2 = \underbrace{111 \dots 1}_{199 \text{ cifras}} \underbrace{0888 \dots 8}_{199 \text{ cifras}} 9$$

$$S \text{ cifras} = 9 \left(\underbrace{200}_{\substack{\# \text{ de} \\ \text{cifras}}} \right) = 1800$$

RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

2. ¿Cuántas bolitas se pueden contar en total, en la siguiente figura?



Resolución

2 bolitas $\rightarrow$  $\rightarrow 4 = 2^2$

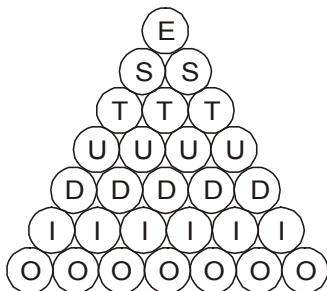
3 bolitas $\rightarrow$  $\rightarrow 9 = 3^2$

4 bolitas $\rightarrow$  $\rightarrow 16 = 4^2$

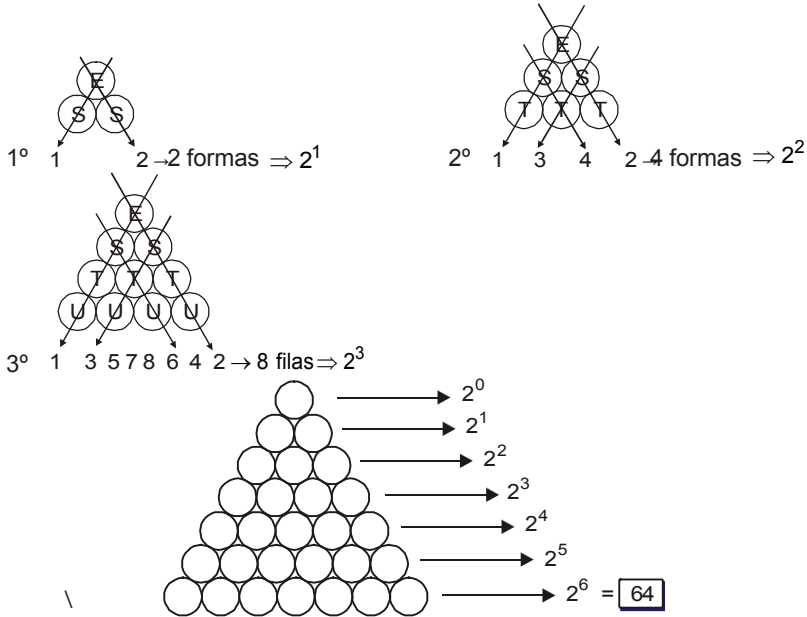
$\vdots$

Luego: $100 \text{ bolitas} \rightarrow 100^2 = 10000$

3. ¿De cuántas maneras diferentes se puede leer la palabra "ESTUDIO" uniéndose círculos consecutivos?

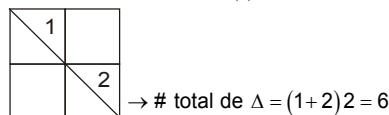
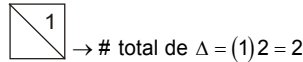


Resolución



4. A una hoja cuadrada y cuadrículada con 100 cuadraditos por lado, se le traza una diagonal (principal). ¿Cuántos triángulos como máximo podrá contarse en total?

Resolución



⋮

$$\# \text{ total de } \Delta = [1+2+3+\dots+100]2 = \frac{100 \cdot 101}{2} \cdot 2 = 10100$$

5. ¿Cuál es el menor número que se debe multiplicar por 360 para obtener un cubo perfecto?

Resolución

(Para formar un cubo perfecto)

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot \underbrace{(5^2 \cdot 3)}_{\text{Número}}$$

El número es 75

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Calcule la suma de cifras del resultado de:

$$\underbrace{(333 \dots 334)}_{20 \text{ cifras}}^2$$

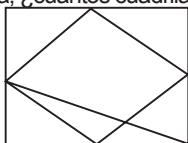
- a) 110 b) 152 c) 142
d) 121 e) 137
2. Calcular la suma de los términos del siguiente arreglo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & \dots & 49 \\ 3 & 5 & 7 & 9 & \dots & 51 \\ 5 & 7 & 9 & 11 & \dots & 53 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 49 & 51 & 53 & 55 & \dots & 97 \end{pmatrix}$$

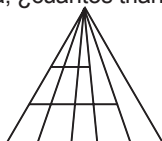
- a) 3000 b) 30625 c) 15625
d) 42625 e) 35625
3. En el siguiente triángulo numérico, halle la suma del primero y el último término de la fila 25.

$$\begin{array}{l} F_1 \rightarrow \quad \quad \quad 1 \\ F_2 \rightarrow \quad \quad 3 \quad 5 \\ F_3 \rightarrow \quad 7 \quad 9 \quad 11 \\ F_4 \rightarrow 13 \quad 15 \quad 17 \quad 19 \\ \vdots \end{array}$$

- a) 1250 b) 1150 c) 1050
d) 2250 e) 2550
4. En la figura, ¿cuántos cuadriláteros hay?

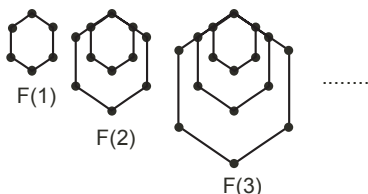


- a) 4 b) 5 c) 6
d) 7 e) 8
5. En la figura, ¿cuántos triángulos hay?



- a) 13 b) 15 c) 32
d) 28 e) 31

6. ¿Cuántas bolitas hay en total en F(19)?



- a) 42 b) 40 c) 84
d) 78 e) 96
7. Calcular la suma de las 20 primeras filas en el triángulo numérico siguiente.

$$\begin{array}{l} F_1 \rightarrow \quad \quad \quad 1 \\ F_2 \rightarrow \quad \quad 3 \quad 3 \\ F_3 \rightarrow \quad 5 \quad 2 \quad 5 \\ F_4 \rightarrow 7 \quad 2 \quad 2 \quad 7 \\ F_5 \rightarrow 9 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 9 \\ \vdots \end{array}$$

- a) 800 b) 841 c) 1221
d) 1141 e) 2809
8. Calcular la suma de los números de la fila 20 en:

$$\begin{array}{l} F_1 \rightarrow \quad \quad \quad 2 \\ F_2 \rightarrow \quad \quad 4 \quad 6 \\ F_3 \rightarrow \quad 8 \quad 10 \quad 12 \\ F_4 \rightarrow 14 \quad 16 \quad 18 \quad 20 \\ \vdots \end{array}$$

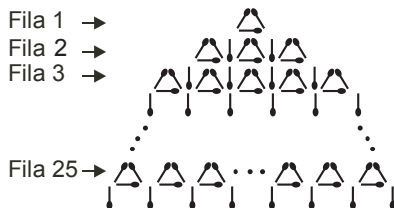
- a) 8 020 b) 4 040 c) 16 020
d) 8 000 e) 16 000
9. Si:

$$\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)+1} = K^2 + n$$

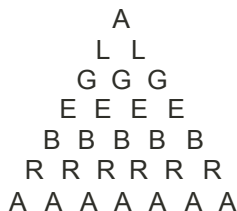
Calcular el valor de "K"

- a) 1 b) -1 c) n-1
d) n e) n+1

10. Calcular el número de palitos en el siguiente castillo:



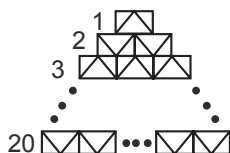
- a) _____ b) _____ c) _____
d) _____ e) _____
11. ¿Cuántas palabras "ÁLGEBRA" se pueden leer en total, uniendo letras vecinas?



- a) 63 b) 64 c) 128
d) 32 e) 256
12. ¿De cuántas maneras distintas se puede leer la palabra "DULCE" en el siguiente arreglo?



- a) 63 b) 31 c) 64
d) 128 e) 256
13. ¿Cuántos triángulos simples se pueden contar en la siguiente figura?



- a) 820 b) 810 c) 760
d) 840 e) 760

14. ¿Por cuánto se le debe multiplicar a N para que tenga raíz cuarta exacta? (Dar como respuesta el menor posible)

$$N = 2^7 \cdot 5^3 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 11^8$$

- a) 13 120 b) 13 230 c) 8 520
d) 11 120 e) 12 240

15. Hallar las dos última cifras de la siguiente suma:

$$S = 1! + 2! + 3! + 4! + \dots + 20!$$

- a) 11 b) 18 c) 23
d) 43 e) 13

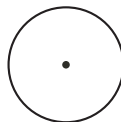
TAREA DOMICILIARIA

1. ¿De cuántas formas diferentes se puede leer la palabra RAZONAR en la siguiente figura?



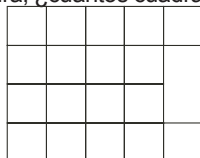
- A) 16 B) 32 C) 64
D) 48 E) 96

2. Halle el número de trozos que se puede obtener del gráfico, al realizarse 6 cortes rectos.



- a) 20 b) 21 c) 22
d) 23 e) 24

3. En la figura, ¿cuántos cuadrados hay?



- a) 18 b) 22 c) 30
d) 32 e) 33

RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

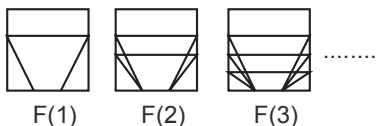
4. Si:

$$\frac{\sqrt{a^5} + \sqrt{b^5} + \sqrt{a^5} + \sqrt{b^5} + \dots}{ab \cdot 7 \text{ sumandos}} = \sqrt{\dots ab}$$

Hallar el valor de "a+b".

- a) 2 b) 4 c) 5
d) 7 e) 9

5. Según las figuras mostradas, ¿cuántos triángulos en total, se cuentan en F(10)?



- a) 110 b) 120 c) 130
d) 140 e) 150

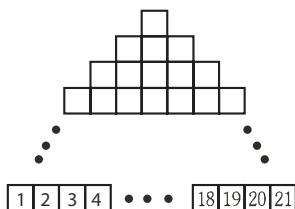
6. Si:

$$\sqrt{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 + 1} = 2755$$

Hallar el valor de "a".

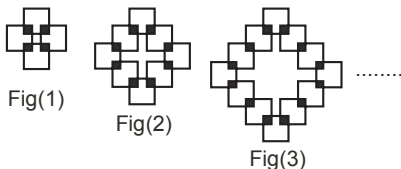
- a) 2 b) 3 c) 6
d) 4 e) 5

7. Calcule el número de rombos con un cuadrado pequeño (simple) interior que se forman al unir los centros de todos los cuadrados de la figura.



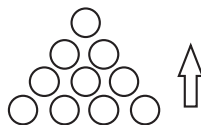
- a) 64 b) 81 c) 65
d) 100 e) 110

8. ¿Cuántos cuadraditos sombreados presentará la Fig(25)?



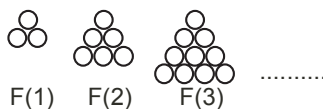
- a) 50 b) 75 c) 100
d) 125 e) 150

9. ¿Cuál es la mínima cantidad de bolitas que se debe mover en la figura para que esté en sentido contrario?



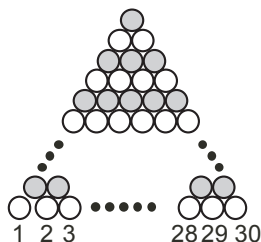
- a) 2 b) 3 c) 4
d) 5 e) 1

10. ¿Cuántos puntos de contacto se contará en la Fig(25)?



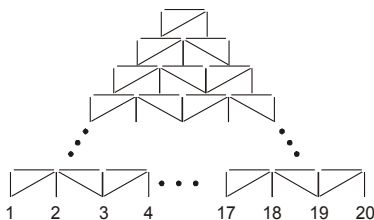
- a) 600 b) 625 c) 2080
d) 810 e) 975

11. ¿Cuántas bolitas sombreadas hay en el siguiente arreglo?



- a) 230 b) 310 c) 315
d) 225 e) 245

12. Determine el total de palitos de la siguiente figura.



- a) 399 b) 190 c) 589
d) 489 e) 579

13. Calcule la suma de todos los números del siguiente arreglo.

$$\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 15 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & 16 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & 17 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 15 & 16 & 17 & 18 & \dots & 29 \end{Bmatrix}$$

- a) 3300 b) 3375 c) 3625
d) 3725 e) 3475

14. Hallar el valor de:

$$\sqrt{\frac{11111111088888889}{123456787654322}} - 1$$

- a) 3 b) 11 c) 7
d) 8 e) 2

15. Calcular el máximo valor que puede tomar: $M+A+R$.

Si: $\overline{AMAR} + \overline{RAMA} = 9328$

- a) 17 b) 18 c) 19
d) 21 e) 20

CLAVES DE RESPUESTA

1	2	3	4	5
C	C	D	D	A
6	7	8	9	10
E	B	C	B	E
11	12	13	14	15
D	C	B	A	A

Razonamiento Lógico

En este capítulo vamos a plantear situaciones en los que sólo necesitaremos de concentración para dar con la respuesta debida; sin necesidad de recurrir a la teoría matemática, sino al sentido común.

Veremos problemas sobre:

- Test de decisiones.
- Cortes y estacas.
- Parentesco (Relaciones familiares).
- Máximos y mínimos. Certezas.
- Orden de información.
- Razonamiento lógico.
- Razonamiento Inductivo – Deductivo.

TEST DE DECISIONES

Está formado por problemas con un aparente caos en su redacción, donde existen muchos datos en desorden, los que pueden ser ordenados, por lo general, en cuadros.

Ejm 1:

En un club se encuentran cuatro deportistas, cuyos nombres son: Juan, Mario, Luis y Jorge. Los deportes que practican son: natación, básquet, fútbol y tenis. Cada uno juega sólo un deporte.

- El nadador, que es primo de Juan, es cuñado de Mario y, además, es el más joven del grupo.
- Luis, que es el de más edad, es vecino del básquetbolista, quien a su vez es un mujeriego empedernido.
- Juan, que es sumamente tímido con las mujeres, es 7 años menor que el tenista. ¿Quién practica básquet?

Resolución

Analicemos con cuidado:

- * Si el nadador es primo de Juan, entonces Juan no es nadador.
- * Como el nadador es cuñado de Mario, entonces Mario no es nadador.
- * Como el nadador es el más joven, Luis no puede ser nadador, ya que es el de más edad.
- * Luis no juega básquet, ya que es vecino del basquetbolista.

- * Juan es menor que el tenista, luego Juan no es el tenista.
- * Juan no juega básquet, ya que el basquetbolista es mujerigo y Juan es tímido.

Colocando en un cuadro todo lo analizado, tendremos:

	Natación	Básquet	Fútbol	Tenis
Juan	NO	NO		NO
Mario	NO			
Luis	NO	NO		
Jorge				

Como cada personaje practica sólo un deporte, en cada columna debe haber un SÍ y en cada fila también; esto hace que si una fila y columna tienen en este caso tres veces NO, el cuarto casillero se completa con SÍ.

Entonces el cuadro completo será:

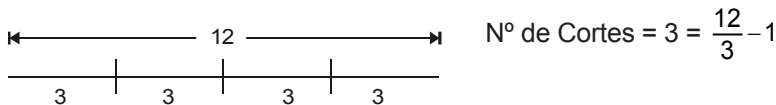
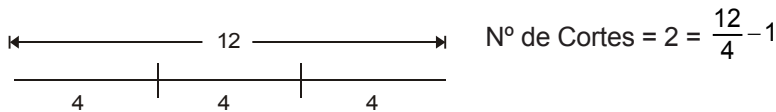
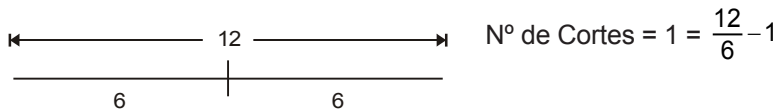
	Natación	Básquet	Fútbol	Tenis
Juan	NO	NO	SI	NO
Mario	NO	SI	NO	NO
Luis	NO	NO	NO	SI
Jorge	SI	NO	NO	NO

Por lo tanto, el que practica básquet es **Mario**.

CORTES Y ESTACAS

Si tuviéramos una varilla de 12 cm, necesitaríamos hacer un corte para lograr dos piezas iguales, o dos cortes para lograr tres piezas iguales o tres cortes para lograr cuatro piezas iguales.

Representamos esto gráficamente:



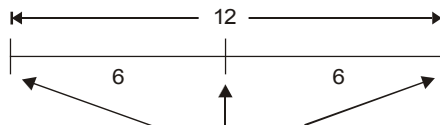
RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

En el último ejemplo, 12 es la longitud total (L_t) de la varilla y 3 es la longitud de cada pieza o longitud unitaria (L_u), de modo que en general:

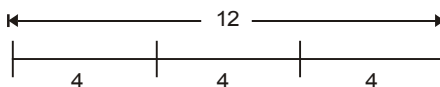
- * El N° de CORTES que podemos hacer en una varilla estará dado por la siguiente relación:

$$\text{N° CORTES} = \frac{L_t}{L_u} - 1$$

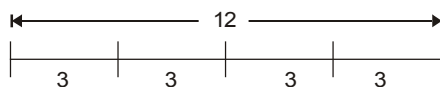
- * Para considerar el hecho de colocar postes o estacas, cada cierta distancia; como en el caso de cortes, lo consideramos gráficamente:



$$\text{N° ESTACAS} = 3 \text{ ó } \text{N° ESTACAS} = \frac{12}{6} + 1$$

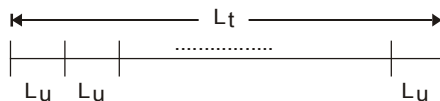


$$\text{N° Estacas} = 4 = \frac{12}{4} + 1$$



$$\text{N° Estacas} = 5 = \frac{12}{3} + 1$$

En general:



$$\text{N° ESTACAS} = \frac{L_t}{L_u} + 1$$

Ejm. 2:

Un joyero cobra S/.5 por dividir una barra de hierro en dos partes. ¿Cuánto se tendrá que pagar si debe partirla en 7 pedazos?

Resolución

Con 1 corte obtenemos	2 pedazos
2 cortes	3 pedazos
3 cortes	4 pedazos
⋮	⋮
→ 6 cortes	7 pedazos

\ Pagó = $6 \times 5 =$ S/.30

PROBLEMAS SOBRE PARENTESCO

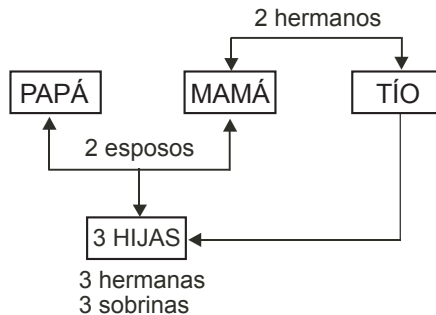
Algunos problemas lógico – deductivos interrogan sobre el número de integrantes de una familia, sobre un tipo específico de relación familiar, etc. La resolución, en algunos casos, consiste en tener presente que cada uno de nosotros, dentro de nuestra familia, desempeña diferentes roles; así, se puede ser al mismo tiempo padre, hijo, hermano, esposo, etc.

Ejm 3:

En una familia se notan 2 esposos, 2 hermanos, 3 sobrinas y 3 hermanas. Al menos, cuántas personas conforman esta familia?

Resolución

"Por lo menos", "Al menos" sirven para expresar la mínima cantidad.



→ Mínimo N° de personas = 6

PROBLEMAS SOBRE MÁXIMOS Y MÍNIMOS (CERTEZAS)

Ejm 4:

Una urna tiene 15 bolas negras, 12 rojas y 9 amarillas. ¿Cuál es la mínima cantidad que debo extraer para tener al menos una de cada color?

Resolución:

Supongamos que la primera bola que se extrae es negra (son las que mas hay); luego necesito extraer una roja y finalmente una amarilla para tener una de cada color; pero la próxima puede seguir siendo negra y así sucesivamente.

Por lo tanto, las primeras bolas que se extraen son las 15 de color negro; las siguientes serán las 12 de color rojo y finalmente se sacará una de color amarillo.

$$\text{--Bolas extraídas} = 15 + 12 + 1 = \boxed{28}$$

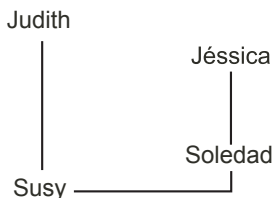
ORDEN DE INFORMACIÓN

Los principales casos son:

- a) **Ordenamiento Vertical.** Se aplica para el ordenamiento de alturas, tamaños, edades, puntajes obtenidos por personas, entre otros.

Ejm 5:

Judith es mayor que Susy, Soledad es menor que Jéssica y Susy es menor que Soledad. ¿Quién es la menor?



→

La menor es Susy

- b) **Ordenamiento Horizontal.** Se aplica para ordenamiento de personas en una hilera o sentados en butacas o uno al lado de otro; para autos en hilera, entre otros.

Ejm 6:

Seis amigos: A, B, C, D, E, F; se sientan en seis asientos contiguos en el cine, "A" se sienta junto y a la izquierda de "B"; "C" está a la derecha de "A", entre "F" y "D"; "D" está junto y a la izquierda de "E"; "F" está a la izquierda de "E". ¿Quién ocupa el cuarto asiento si los contamos de izquierda a derecha?

Resolución:

Ubicando de acuerdo a la información, tenemos:

Izquierda			Derecha		
A	B	F	C	D	E

→ El 4º asiento es ocupado por C

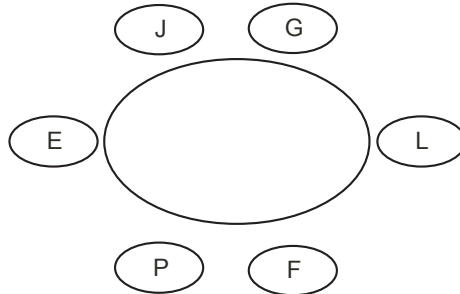
- c) **Ordenamiento Circular.** Se aplica cuando un conjunto de seres se ordenan alrededor de una mesa circular o elíptica, o juegan a la ronda.

Ejm 7:

Seis amigos están sentados alrededor de una mesa elíptica. Si se sabe que Luis no está sentado al lado de Enrique ni de José, Fernando no está al lado de Gustavo ni de José, Enrique no está al lado de Gustavo ni de Fernando, y Pedro está sentado junto a Enrique, a su derecha. ¿Quién está sentado junto y a la izquierda de Enrique?

Resolución:

Ubicando de acuerdo a la información tenemos:



→ JOSÉ es el que está sentado a la izquierda de Enrique.

RAZONAMIENTO LÓGICO

A continuación abordaremos problemas que no requieren de alguna teoría matemática compleja, sólo nuestro sentido lógico.

Ejm 8:

Mañana será el ayer del antes de ayer del mañana del sábado. ¿Qué día fue ayer?

Resolución:

Mañana del sábado: Domingo.

Antes de ayer del domingo: Viernes

Ayer del viernes: Jueves

→ Mañana será jueves

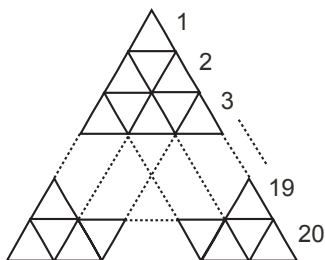
Hoy es Miércoles

→ Ayer fue MARTES

Es aquel tipo de razonamiento que, partiendo de casos particulares, llega a una conclusión en general.

Ejm 9:

Cuántos triángulos simples, en total, hay en la figura?



Resolución:

Si asignamos letras a las figuras pequeñas, ellas sólo serían los triángulos simples.

→Contando, en forma acumulada, por filas, tendremos:

Hasta la fila :	Total de triángulos :
1	$1 = 1^2$
2	$4 = 2^2$
3	$9 = 3^2$
4	$16 = 4^2$
$\vdots$	$\vdots$
$\rightarrow 20$	$\longrightarrow 20^2$

/

ÜÜÜÜÜÜÜÜÜÜÜÜÜÜÜÜÜÜÜÜ

RAZONAMIENTO DEDUCTIVO

Es aquel tipo de razonamiento en el que, partiendo de una conclusión general, se llega a verificar una premisa particular.

Ejm 10:

Los hijos de la señora Carmela son inteligentes. Laura, es hija de la señora Carmela.

→ Laura es inteligente

PROBLEMAS PROPUESTOS

Analiza cada uno de los casos diferentes con mucho cuidado y resuelve.

1. En una bolsa tenemos: 8 caramelos de menta, 7 de limón y 6 de fresa. ¿Cuántos, como mínimo, debo de sacar, sin mirar, para tener la certeza de haber sacado dos de igual sabor?
a) 2 b) 3 c) 4
d) 17 e) 15
2. ¿Qué parentesco tiene conmigo el hijo de la nuera de la mamá de mi madre?
a) Tío b) Sobrino
c) Hermano d) Padre
e) Primo
3. En una fiesta se encuentran 3 hermanos, 3 padres, 3 tíos, 3 sobrinos y 3 primos. Si cada uno necesita una señorita para bailar, calcular el número de señoritas para bailar, como mínimo.
a) 18 b) 15 c) 9
d) 6 e) 3
4. Siendo lunes el mañana de ayer. ¿Qué día será el ayer del pasado mañana?
a) Lunes b) Domingo
c) Martes d) Miércoles
e) Jueves
5. En una reunión se encuentran dos padres, dos hijos y un nieto. ¿Cuántas personas como mínimo se encuentran en dicha reunión?
a) 3 b) 4 c) 5
d) 6 e) 7
6. Una enfermera da una pastilla cada 36 minutos a un paciente durante 9 horas, tanto al comienzo como al final. ¿Cuántas pastillas tomará el paciente?
a) 15 b) 16 c) 17
d) 18 e) 14
7. Emerson es 4 años menor que Ramón, Luis es un año mayor que Pedro, Luis es 2 años menor que Jhon, y Ramón es 7 años mayor que Jhon. Al restar la edad de Ramón y la de Pedro, obtenemos:
a) 9 b) 10 c) 11
d) 12 e) 13
8. Un herrero tiene seis trozos de cadena de 4 eslabones cada uno. ¿Cuál es el menor número de eslabones que tiene que cortar y soldar para tener una sola cadena continua (no collar)?
a) 3 b) 4 c) 5
d) 6 e) 7

RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

9. Un terreno rectangular mide 24 m de largo por 6 de ancho. Cada 3 metros se coloca una estaca de 1,20 metros de altura. El número de estacas que se deben colocar en su perímetro, es:
a) 19 b) 20 c) 21
d) 22 e) 48
10. Se tiene 9 bolas de billar de un mismo tamaño y de un mismo peso, a excepción de una bola que pesa más. Empleando una balanza de dos platillos y sin pesas, ¿cuántas pesadas deben hacerse como mínimo para encontrar la bola de mayor peso?
a) 4 b) 3 c) 2
d) 1 e) 5.
11. Un viajero que debe cruzar un río tiene un lobo, una oveja y un atado de alfalfa. El único bote disponible es muy pequeño y no puede llevar más que al viajero y uno de sus bienes. Si logró transportar todos sus bienes a la otra orilla, ¿cuántas veces cruzó el río en el bote?
a) 5 b) 6 c) 7
d) 8 e) 9
12. Cuatro amigos viven en un edificio de cuatro pisos. Arturo vive en el primer piso, Mario vive más abajo que Jorge y Willy vive un piso más arriba que Mario. ¿En qué piso vive Jorge?
a) 1° b) 2° c) 3°
d) 4° e) 2° o 3°.
13. Una caja grande contiene 2 cajas y 3 guantes. Cada una de éstas contiene otras dos cajas y 3 guantes, y finalmente cada una de estas últimas cajas contienen dos cajas y 3 guantes. Entonces, ¿cuántos objetos hay en total?
a) 34 b) 35 c) 36
d) 37 e) 40
14. ¿Cuántos cortes como mínimo debe realizar «Blanca nieves» a un keke para compartir en partes iguales con los 7 enanitos?
a) 8 b) 4 c) 2
d) 3 e) 1
15. Manuel, Glenn, Raúl, Kenyi y Gabriel se turnan para trabajar con una fotocopidora; una sola persona la usa cada día y ninguno de ellos la utiliza el sábado o domingo. Manuel sólo puede usar la fotocopidora a partir del jueves, Raúl trabaja con la máquina un día después de Glenn; Gabriel sólo puede trabajar con la fotocopidora miércoles o viernes; y ni Gabriel, ni Glenn, ni Raúl trabajan con la fotocopidora los miércoles; luego, se deduce que:
a) Glenn trabaja el viernes
b) Kenyi trabaja el martes
c) Raúl trabaja el lunes
d) Gabriel trabaja el miércoles
e) Manuel trabaja el jueves

TAREA DOMICILIARIA

1. ¿Cuántas personas como mínimo se necesitan para formar 6 filas de 3 personas cada una?
a) 9 b) 6 c) 8
d) 7 e) 5
2. Margarita, Rosa, Azucena y Violeta son cuatro chicas que reciben de sus enamorados un ramo de flores cada una y que de casualidad concuerdan con sus nombres, aunque ninguna recibió de acuerdo al suyo. Se sabe que el ramo de rosas lo recibió Azucena, pero ni Rosa ni Violeta recibieron las azucenas, entonces Violeta recibió:
a) Violetas b) Azucenas
c) Rosas d) Margarita
e) Clavel
3. Una oruga sube por un árbol, cada día logra ascender un metro, pero cada noche su propio peso lo hace descender 60 cm. ¿Cuánto tardará en llegar a lo alto del árbol de 11 m de altura?
a) 27 hrs b) 28 hrs c) 25 hrs
d) 26 hrs e) 29 hrs

4. En un cierto mes, el primer y último día fue lunes. ¿Qué día de la semana fue el 21 de setiembre de dicho año?
a) Lunes b) Martes
c) Miércoles d) Jueves
e) Viernes
5. Seis personas se ubican alrededor de una mesa circular, Manuel no está sentado al lado de María ni de Juan; María no está al lado de Ana ni de Jorge; Oscar está junto a María, a su derecha; Jorge no está sentado al lado de Ana ni de Juan. ¿Quién está sentado junto y a la izquierda de la persona que está sentada junto y a la izquierda de Jorge?
a) Oscar b) Juan c) María
d) Jorge e) Manuel
6. Tres clases de caramelos (limón, fresa y naranja) han sido envasados en 3 latas distintas. Por equivocación las etiquetas han sido colocadas en latas que no corresponde al tipo de caramelos que contiene. ¿Cuántas latas se debe abrir como mínimo para saber con seguridad el tipo de caramelo que contiene cada una?
a) 3 b) 2 c) 1
d) 0 e) N.A.
7. El primer día del campeonato mundial femenino de voley iban a jugarse "y" partidos entre los equipos de Brasil, Corea, Japón, Egipto, Perú, Italia, México y Zaire. Los periodistas preguntaron a 3 aficionados, cuáles serían a su juicio los ganadores. Las respuestas fueron:
A: Brasil, Corea, Japón, Perú
B: Perú, México, Zaire, Japón
C: Japón, Corea, Egipto, Zaire
¿Contra qué equipo jugó Japón?
a) Brasil b) Perú c) Zaire
d) Corea e) Italia
8. En una urna se tienen 10 fichas numeradas del 1 al 10. ¿Cuál es el mínimo número de fichas que se han de extraer para tener la seguridad de haber sacado 3 fichas numeradas consecutivamente?
a) 9 b) 5 c) 6
d) 7 e) 8
9. Luis debe tomar una píldora «Vitanol» cada 3 horas y dos píldoras «Fenapol» cada 4 horas. Si comenzó su tratamiento tomando ambos medicamentos, en 3 días, cuántas píldoras habrá tomado.
a) 54 b) 64 c) 74
d) 63 e) 60
10. En un terreno rectangular se han colocado "x" estacas en todo su perímetro; las estacas distan entre si "y" metros; y el ancho del terreno es "z" metros. ¿Cuánto mide el largo?
a) $\frac{xy-z}{2}$ b) $\frac{xy}{2} - 2z$ c) $\frac{xy-2z}{2}$
d) $\frac{xy+2z}{2}$ e) $\frac{xy}{2} + z$
11. Hallar la edad del mayor de 2 hermanos Luis y Héctor, si se sabe que:
I. Hace 3 años la suma de las edades de ambos era 14.
II. Dentro de 15 años la suma de las edades de ambos será 50, luego:
a) Sólo I b) Sólo II c) I y II
d) I ó II e) I ó III
12. C, E, L y M están emparentados entre sí:
· C o E es el hijo único de L
· E o L es la hermana de M
· M es el hermano de C o su hija única
Uno de los cuatro es del sexo opuesto a los otros tres: ¿Quién es del sexo opuesto a los demás?
a) C b) N c) M
d) E e) L

RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

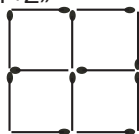
13. La gráfica nos muestra a 12 palitos de fósforo (todos del mismo tamaño). Donde:

«X» es el menor número de palitos que se mueven, de tal manera que queden 10 cuadrados.

«Y» es el menor número de palitos que se mueven, de tal manera que queden 3 cuadrados iguales.

«Z» es el menor número de palitos que se mueven para que se formen 7 cuadrados.

Hallar: «X+Y+Z»



- a) 7 b) 8 c) 9
d) 10 e) 11

14. Para el cumpleaños de Alberto, su esposa le prepara una torta de forma circular cuya área es $1024\pi \text{ cm}^2$; en plena fiesta Alberto tiene que partir la torta en partes iguales para distribuirlo entre sus invitados. Si cada corte lo hace a $2\pi \text{ cm}$. ¿Cuántos cortes realiza Alberto?

- a) 29 b) 30 c) 31
d) 32 e) 34

15. En un mes hay 5 jueves, 5 viernes y 5 sábados, ¿Qué fecha cae el tercer miércoles de dicho mes?

- a) 19 b) 20 c) 21
d) 18 e) 24

CLAVES DE RESPUESTA

1	2	3	4	5
D	D	D	C	C
6	7	8	9	10
C	E	E	D	C
11	12	13	14	15
E	E	C	D	C

Métodos Aritméticos Especiales

El objetivo principal de este capítulo es que el alumno utilice adecuadamente las cuatro operaciones fundamentales (+; -; x; ÷).

Las cuatro operaciones fundamentales, son los instrumentos matemáticos más antiguos utilizados por el hombre que nos permiten resolver problemas de carácter comercial y de la vida diaria.

Ejm. 1:

Un sastre pensó confeccionar 100 camisas en 20 días, pero tardó 5 días más por trabajar 2,5 horas menos cada día. ¿Cuántas horas trabajó por día?

Resolución

El sastre perdió 2,5 horas por día, durante 20 días; es decir:

$$\text{Perdió: } 2,5 \times 20 = 50 \text{ horas}$$

Las que recupera en cinco días, a razón de:

$$\frac{50h}{5d} = 10h / d$$

Ejm. 2:

Juan es el doble de rápido que Pedro. Si juntos pueden hacer un trabajo en 10 días; ¿cuánto tiempo demorará cada uno en hacerlo solo?

Resolución

Asumiendo que, en un día de trabajo, Juan hace: 2k.

⇒ Pedro hace: k

Juntos hacen 3k.

En 10 días harían 30k, los que c/u demoraría hacerlo en:

$$\text{Juan: } 30k/2k = 15 \text{ días}$$

$$\text{Pedro: } 30k/k = 30 \text{ días}$$

RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

Cálculo de dos Números, conociendo:

I. La Suma y Diferencia

Se emplea solamente para determinar dos cantidades, si conocemos la suma (S) y diferencia (D) de ambos, lo que implica que una de las cantidades a calcular es mayor que la otra.

$$N^{\circ} \text{ mayor} = \frac{S+D}{2}$$

$$N^{\circ} \text{ menor} = \frac{S-D}{2}$$

II. Suma y Cociente

En el caso que tengamos como dato la suma de dos números (S) y el cociente de ambos (q), podemos calcular ambos números mediante la siguiente relación:

$$N^{\circ} \text{ menor} = \frac{S}{q+1}$$

$$N^{\circ} \text{ mayor} = \frac{Sq}{q+1}$$

III. Diferencia y Cociente

En el caso que tengamos como dato la diferencia (D) y el cociente de ambos (q), podemos calcular ambos números mediante la siguiente relación:

$$N^{\circ} \text{ menor} = \frac{D}{q-1}$$

$$N^{\circ} \text{ mayor} = \frac{Dq}{q-1}$$

Nota:

Es recomendable saber que el cociente es la relación del número mayor al número menor.

En un enunciado, al decir que:

- Un número es el triple del otro significa que su cociente es 3 ($q=3$).
- Un número es la mitad del otro significa que su cociente es 2 ($q=2$).
- Un número es los $\frac{4}{7}$ de otro significa que: $q = \dots\dots\dots$

Ejm. 3:

En cierto día, las horas transcurridas exceden a las que faltan transcurrir en 6 horas. A qué hora ocurre esto?

Resolución

Sean "tiempo transcurrido" (t.t) y "tiempo no transcurrido" (t.n.t.)

Sabemos que la suma y la diferencia de estos dos tiempos es:

$$S=24h \quad ; \quad D=6h$$

$$\Rightarrow \text{t.t. (mayor)} = \frac{24+6}{2} = 15 \text{ horas}$$

$\therefore$ Hora: 3 p.m.

Ejm. 4:

Una persona decide comprar la edición popular antes que la edición de lujo de un libro. ahorrándose así S/.42; esto representa la mitad de lo que pagaría por comprar ambas ediciones. ¿Cuánto pagó por la edición que adquirió?

Resolución

$$D = S/.42$$

$$S = S/.84$$

$$\Rightarrow \text{Costo edición popular} = \frac{84 - 42}{2} \\ = S/.21$$

Ejm. 5:

Dos personas tienen S/. 900 y S/. 300, respectivamente. Se ponen a jugar a las cartas a S/. 10 cada partida; y al final, la primera que ha ganado todas las partidas, tiene el cuádruple de lo que tiene el segundo. ¿Cuántas partidas se jugaron?

Resolución

La suma total de dinero, entre juego y juego, no varía.

$$\Rightarrow S = S/. 1200$$

Luego de "n" jugadas: $q = 4$

En ese momento el ganador tiene:

$$\frac{1200 \cdot 4}{4 + 1} = S/.960$$

habiendo ganado: $S/.960 - S/.900 = S/.60$

A S/.10 cada partida.

$$\Rightarrow \text{Nº de partidas} = n = \frac{S/.60}{S/.10} = 6$$

Ejm. 6:

En aquel entonces, tu tenías 20 años más que yo, que tenía la quinta parte de la edad que tenías. Si eso sucedió en 1980, actualmente (2001), ¿qué edad tenemos, asumiendo que ya cumplimos años?

Resolución

$$D = 20$$

$$q = 5$$

$$\text{En 1980 teníamos: } Tu \text{ (mayor)} = \frac{20 \cdot 5}{5 - 1} = 25$$

$$Yo \text{ (menor)} = 25 - 20 = 5$$

$\Rightarrow$ Actualmente tenemos: 46 y 26 años.

RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

Ejm. 7:

Si: $a + b + c = 13$;

Además: $\overline{ab} + \overline{bc} = 97$

Hallar: $a - b + c$

Resolución

Descomponiendo: $\overline{ab} + \overline{bc} = 97$, tenemos:

$$10a + b + 10b + c = 97$$

$$9a + a + b + 10b + c = 97$$

$$9a + 10b + 13 = 97$$

$$9a + 10b = 84$$

Lo que cumple para $\boxed{a=6}$; $\boxed{b=3}$; $\boxed{c=4}$

Como: $a - b + c = 6 - 3 + 4 = 7$

MÉTODOS OPERATIVOS

El propósito de este tema es mostrar los "métodos" usados con mayor frecuencia, que han demostrado su eficacia frente a otros procedimientos; aunque es necesario reconocer en qué casos se deben aplicar.

Método de las Diferencias (Método del rectángulo)

Es un método que se aplica a problemas donde participan dos cantidades excluyentes, una mayor que la otra, que se comparan en dos oportunidades originando, generalmente, en un caso sobrante o ganancia y en el otro caso, un faltante o pérdida.

Ejm 1:

Un comerciante analiza: Si compro a S/. 15 el kilo de carne, me faltaría S/. 400; pero si sólo compro de S/. 8 el kilo me sobraría S/. 160.

¿Cuántos kilogramos necesita comprar y de que suma dispone?

Resolución:

$$\begin{array}{r} \text{(Cuando falta)} \\ \text{S/. } 15c / \text{kg} \text{ ---- } \text{S/. } 400 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{(Cuando sobra)} \\ \text{S/. } 8c / \text{kg} \text{ ---- } \text{S/. } 160 \end{array}$$

$$\text{Si compro a } D_u = \text{S/. } 7c / \text{kg} \quad D_t = \text{S/. } 560$$

$$\Rightarrow \text{Cantidad (Kg)} = \frac{D_t}{D_u} = \frac{\text{S/. } 560}{\text{S/. } 7} = 80$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{Dinero disponible} &= 80\text{kg} \times \text{S/. } 8 + \text{S/. } 160 \\ &= \text{S/. } 800 \end{aligned}$$

Ejm. 2:

Para ganar \$28 en la rifa de una filmadora se hicieron 90 boletos, vendiéndose únicamente 75 boletos y originando así una pérdida de \$17.

Calcular el costo de cada boleto y el valor de la filmadora.

Resolución:

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Si vendiera } 90 \text{ bol} & \overset{\text{gana}}{\text{-----}} & \$28 \\
 & \overset{\text{pierde}}{\text{-----}} & \\
 \hline
 75 \text{ bol} & \text{-----} & \$17 \\
 \hline
 \Delta = 15 \text{ bol} & & \Delta = \$45
 \end{array}$$

$$\Rightarrow \text{Costo c/boleto} = \frac{\$45}{15 \text{ bol}} = \$3$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \text{Valor de la filmadora} &= 90 \times 3 - 28 \\
 &= \$242
 \end{aligned}$$

Método del Cangrejo (Método Inverso)

Es un método utilizado en problemas donde interviene una variable a la cual se realiza una serie de operaciones directas hasta llegar a un resultado final. Se denomina "método inverso", porque a partir del dato final se realizan las operaciones inversas hasta llegar al valor inicial.

Ejm. 3:

Al preguntarle a "Pepito" por su edad, el contestó con evasivas diciendo lo siguiente: "si le agregas 10, al resultado lo multiplicas por 5 y enseguida le restas 26, para luego extraerle la raíz cuadrada y, por último, lo multiplicas por 3, obtendrás 24". ¿Cuál es la edad de "Pepito"?

Resolución:

Considerando la edad de Pepito: E; y aplicando las operaciones consecutivamente como lo indicado por "Pepito", tenemos:

$$E + 10 \cdot 5 - 26\sqrt{\quad} \cdot 3 = 24$$

Aplicando operaciones inversas, tenemos:

$$\begin{aligned}
 E &= 24 \div 3 (\quad)^2 + 26 \div 5 - 10 \\
 E &= 8 \text{ años}
 \end{aligned}$$

Ejm. 4:

El nivel del agua de un tanque en cada hora desciende 2 m por debajo de su mitad, hasta quedar vacío el tanque luego de 3 horas. ¿Qué volumen de agua se ha utilizado, sabiendo que el tanque tiene una base circular de 5 m²?

RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

Resolución:

Considerando el nivel inicial del agua: H

Del problema deducimos que, en cada hora, queda la mitad menos 2 m de agua.

Entonces, en tres horas, queda:

$$H \div 2 - 2 \div 2 - 2 \div 2 - 2 = 0$$

Aplicando operaciones inversas, tenemos:

$$H = 0 + 2 \times 2 + 2 \times 2 + 2 \times 2$$

$$H = 28 \text{ m}$$

Teniendo en cuenta que el volumen de un tanque circular es:

$$V = \text{Área de la base} \times \text{altura}$$

$$\Rightarrow V = 5 \text{ m}^2 \times 28 \text{ m}$$

$$V = 140 \text{ m}^3$$

Método de suposición arbitraria (Regla el Rombo)

Se aplica cuando en un problema participan un número de elementos divididos en dos grupos, cuyos valores unitarios (o características) se conocen y, además, nos proporcionan el valor total, que es la resultante de sumar todos los valores unitarios.

Ejm. 5:

En el salón de clase el peso promedio de cada alumno es de 75 kg y de cada alumna 60 kg. Si el peso total de todos es de 4020 kg, ¿en cuánto excede el número de mujeres al de los varones, si en total son 60?

Resolución:

Aplicando el método de la suposición arbitraria:

Supongamos que los 60 alumnos pesan 75 kg c/u.

$\Rightarrow$ Peso de todos los alumnos sería (Valor supuesto) = $60 \times 75 = 4500 \text{ Kg}$.

Este valor excede al real en:

$$4500 - 4200 = 480 \text{ Kg}$$

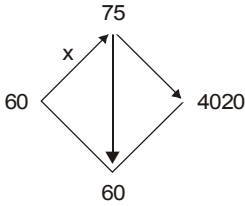
Este exceso es por que asumimos que todos eran varones, por lo que dimos un valor agregado a cada alumna de: $75 - 60 = 15 \text{ Kg}$.

$$\Rightarrow \text{N}^\circ \text{ de alumnas} = \frac{480}{15} = 32$$

$$\text{N}^\circ \text{ de alumnos} = 60 - 32 = 28$$

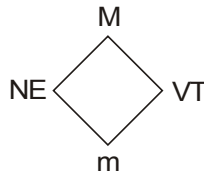
$$\therefore \Delta = 32 - 28 = 4$$

Las operaciones efectuadas en la solución de este problema se pueden resumir en:



$$\text{Nº Alumnas} = \frac{60 \cdot 75 - 4020}{75 - 60} = 32$$

Esta es la regla práctica del método de la suposición arbitraria, llamada REGLA DEL ROMBO, que consiste en ubicar la información del problema en los cuatro vértices del rombo, de la siguiente manera:



Donde:

NE: Número total de elementos

M : Mayor valor unitario

m: menor valor unitario

VT: Valor total

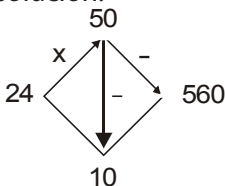
Si se desea calcular el número de elementos que tiene el menor valor unitario, se procede de la siguiente manera:

$$\text{Nº} = \frac{\text{NE} \cdot \text{M} - \text{VT}}{\text{M} - \text{m}}$$

Ejm. 6:

En una billetera hay 24 billetes que hacen un total de S/. 560 soles. Si solamente hay billetes de S/. 50 y S/. 10 soles, ¿cuántos eran de cada clase?

Resolución:



$$\Rightarrow \text{Nº billetes (S/. 10)} = \frac{24 \cdot 50 - 560}{50 - 10} = 16$$

$$\text{Nº billetes (S/. 50)} = 24 - 16 = 8$$

REGLA CONJUNTA

Es un método que nos permite determinar la equivalencia de dos elementos.

Procedimiento:

1. Colocar la serie de equivalencias formando columnas.
2. Procurar que en cada columna no se repitan los elementos; si se repiten, cambiar el sentido de la equivalencia.
3. Multiplicar los elementos de cada columna.
4. Despejar la incógnita.

Ejm. 7:

Si 4 soles equivalen a una libra esterlina, 3 yenes equivalen a 2 libras esterlinas, 5 marcos equivalen a 6 yenes, y 9 marcos equivalen a 6 pesetas; ¿cuántas pesetas equivalen a 16 soles?

Resolución:

$$\begin{array}{rcl}
 S/.4 & \Leftrightarrow & 1 \text{ l.e.} \\
 2 \text{ l.e.} & \Leftrightarrow & 3 \text{ yenes} \\
 6 \text{ yen.} & \Leftrightarrow & 5 \text{ marcos} \\
 9 \text{ mar.} & \Leftrightarrow & 6 \text{ pesetas} \\
 X \text{ pes.} & \Leftrightarrow & S/.16 \\
 \hline
 4 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 9 \cdot X & = & 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 16 \\
 X & = & 10/3
 \end{array}$$

Ejm. 8:

Qué suma necesitará un Gobierno para pagar a 4 coroneles, si el sueldo de 6 coroneles equivale al de 10 comandantes; el de 5 comandantes al de 12 tenientes; el de 6 tenientes al de 9 sargentos, y si 4 sargentos ganan S/. 2400 al mes.

Resolución:

$$\begin{array}{rcl}
 S/. X & \Leftrightarrow & 4 \text{ cor} \\
 6 \text{ cor} & \Leftrightarrow & 10 \text{ com} \\
 5 \text{ com} & \Leftrightarrow & 12 \text{ ten} \\
 6 \text{ ten} & \Leftrightarrow & 9 \text{ sarg} \\
 4 \text{ sarg} & \Leftrightarrow & S/.2400 \\
 x \cdot 6 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 4 & = & 4 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 9 \cdot 2400 \\
 X & = & S/. 14\ 400
 \end{array}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

- Un comerciante compra cierta cantidad de agendas en S/.1424 y los vende todos en S/. 2492, ganando así S/1,50 por agenda. ¿Cuántas agendas compró y cuánto le costó cada una?
a) 720 y 12 b) 720 y 4
c) 712 y 2 d) 712 y 4
e) 710 y 3
- Dos secretarías tienen que escribir 600 invitaciones cada una. La 1ra. escribe 15 invitaciones en 1/4 de hora, mientras que la 2da. escribe 80 invitaciones por hora. ¿Cuántas invitaciones le falta a la 1ra. para terminar cuando la 2da. concluya?
a) 120 b) 130 c) 150
d) 160 e) 180
- Se compra mercurio a \$ 80 el kg para venderlo a \$ 120 y ganar \$ 2000. Se pierde la quinta parte y se desea, no obstante, ganar la misma cantidad. ¿A cómo hay que vender el kg de Mercurio para conseguirlo?
a) 120 b) 130 c) 150
d) 180 e) 190
- Por un año de trabajo se le promete a un obrero \$ 1900 dólares y una moto; pero a los 8 meses se le despide dándole \$ 1100 y la moto. ¿Cuánto vale la moto?
a) 400 b) 300 c) 200
d) 600 e) 500
- Si vende un carro en \$ 3000, un vendedor recibe de comisión \$ 200; y si lo vende en \$ 5000, recibe \$ 300 de comisión. ¿Cuál fue su comisión en dólares si lo vendió en \$ 4500?
a) 275 b) 265 c) 245
d) 285 e) 270
- Una niña compra varios cajones de naranjas a S/. 10 cada uno. Cada cajón contiene 30 kg. Vende la mitad a S/. 0,50 el kg; el resto a S/. 0,20 el kg, ganando S/. 15 en total. ¿Cuántos cajones compró?
a) 15 b) 28 c) 27
d) 29 e) 14
- Un comerciante paga \$ 15 400 por cierto número de radios y vende una parte de ellos por \$ 3800 a \$ 100 por cada radio, perdiendo \$ 10 en cada uno. ¿A cómo deberá vender cada uno de los restantes para ganar \$ 2680 en la venta total?
a) \$ 140 b) \$ 120 c) \$ 160
d) \$ 110 e) \$ 100
- Al comprar un TV. y un CD se gastó \$ 630; pero se sabe que el TV. costó \$ 70 más que el CD. ¿Cuánto se gastará si se quiere comprar 2 TV.?
a) \$ 700 b) \$ 400 c) \$ 100
d) \$ 200 e) \$ 800
- El cumpleaños de María será en el mes de octubre, cuando los días transcurridos del mes excedan en una semana al número de días que aún faltan transcurrir de dicho mes. ¿En qué fecha celebrará su cumpleaños?
a) 17 b) 18 c) 19
d) 20 e) 21
- Un buque de travesía lleva víveres para una tripulación de 140 hombres para 100 días. Después del día 49, el Capitán recibe 30 naufragos de otro buque. ¿Para cuántos días más alcanzarán las provisiones, suponiendo que cada tripulante recibe una ración entera?
a) 10 b) 20 c) 15
d) 14 e) 42
- La suma de dos números es 611, su cociente es 32 y el residuo de su división el más grande posible. ¿Cuál es la diferencia entre los números?
a) 575 b) 426 c) 230
d) 430 e) 568

RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

12. Al dividir el número $\overline{abc}$ entre $\overline{bc}$ se obtiene 11 de cociente y 80 de residuo. ¿Cuál es el valor de $a+b+c$?
a) 19 b) 18 c) 17
d) 16 e) 15
13. En un zoológico, entre todos los leones y loros se podían contar 30 ojos y 44 patas. Determinar el número de alas.
a) 16 b) 14 c) 13
d) 15 e) 12
14. Una empresa comercial desea repartir 5 galones de pintura a cada una de las casas de una quinta; si así lo hace, le estarían sobrando 10 galones; pero si entrega 8 galones a cada una, le faltarían 14 galones. ¿Cuántas son las casas y cuál es la cantidad de galones que se dispone?
a) 8; 90 b) 8;30 c) 8;20
d) 6;20 e) 7;32
15. Un joven sale con su "media naranja" y sus cuñados a la feria. Observa que si saca entradas de S/. 30, le faltaría para dos de ellos; por lo que decide sacar entradas de S/.10, así entran todos y aún le sobran S/.100. ¿Cuántos eran los cuñados y de qué suma disponía?
a) 6 b) 8 c) 4
d) 3 e) 5
3. Un jugador hizo 3 apuestas. En la 1ra. duplicó su dinero y gastó 30 soles, en la 2da. triplicó su dinero y gastó 54 soles, en la 3ra. cuadruplicó su dinero y gastó 72 soles, quedándole al final 48 soles. ¿Cuánto dinero tenía al principio?
a) 25 b) 27 c) 29
d) 31 e) 30
4. A una función musical concurren 500 estudiantes y se recaudó S/. 860. Si los boletos de platea costaron S/. 1,50 y los de Mezzanine S/. 2, ¿cuántos boletos de cada clase se vendieron?
a) 280 y 150 b) 220 y 180
c) 300 y 150 d) 280 y 220
e) 120 y 80
5. 3 envases de "A" equivalen a 2 envases de "B", del mismo modo que 4 envases de "B" equivalen a 3 envases de "C"; 10 envases de "C" equivalen a 8 envases de "D"; 40 litros de agua entran en 4 envases de "D". ¿Cuántos envases de "A" se van a necesitar para envasar 60 litros?
a) 10 b) 11 c) 13
d) 14 e) 15
6. Por un año de trabajo a un empleado se le promete dar \$ 2300 y una computadora, pero a los 9 meses se le despide dándole \$ 1500 y la computadora. ¿Cuánto vale la computadora?
a) \$ 800 b) \$ 1100 c) \$ 900
d) \$ 700 e) \$ 1200
7. Se ha comprado 2200 botellas a S/. 27 el ciento, habiendo pagado S/. 10,40 por el transporte de cada millar. ¿A cómo debe venderse el ciento para ganar S/. 118,12 si por cada 100 botellas vendidas se van a regalar 4 y 16 se rompieron en el camino?
a) S/. 30 b) S/. 33 c) S/. 35
d) S/. 37 e) S/. 39

TAREA DOMICILIARIA

1. Si se posaran 3 aves en cada poste, sobrarían 4 postes; pero si se posara un ave en cada poste, sobrarían 6 aves. ¿Cuál es la cantidad de postes?
a) 6 b) 7 c) 8
d) 9 e) 10
2. Un niño ha pensado un número en el cual realiza las siguientes operaciones consecutivas: le agrega 2, luego lo multiplica por cuatro, enseguida le merma 4; a este resultado le extrae la raíz cuadrada; luego lo divide entre 2; y por último, le quita uno, obteniendo

8. Un microbús que hace servicio de Lima al Callao en uno de sus viajes recaudó S/. 66,00 por los adultos (S/. 1,00 c/u) y S/. 13,50 por los niños (S/. 0,50 c/u). Cada vez que bajó un niño, subieron 3 adultos y cada vez que un adulto bajó, subieron dos niños. Si el microbús llegó al Callao con 55 adultos y 11 niños. ¿Con cuántas personas partieron de Lima?
a) 32 b) 18 c) 27
d) 16 e) 23
9. Un tonel de cerveza cuesta S/. 120; pero cuando se retiran 6 litros, sólo cuesta S/.100. ¿Cuántos litros tiene el recipiente?
a) 18 b) 36 c) 12
d) 144 e) 288
10. Un comerciante compró seis docenas de libros a S/. 7 cada uno y recibe un libro más por docena; en la compra le hacen un descuento de S/. 25. Si cada libro lo vende a S/. 8, ¿cuál será su ganancia?
a) S/.145 b) S/. 125 c) S/. 135
d) S/. 155 e) S/. 165
11. Una casa comercial vende en S/. 7850 cierto número de calculadoras que compró en S/. 8975. ¿Cuántas calculadoras vendió si en la venta de cada una perdió S/. 45?
a) 15 b) 25 c) 35
d) 45 e) 55
12. Compré 60 brochas a S/. 7 cada una. Después de vender 20, ganando S/.3 en cada una, obsequio 8. ¿A cómo vendí cada brocha restante si al finalizar el negocio obtuve una ganancia de S/. 100?
a) S/.10 b) S/.12 c) S/.14
d) S/.18 e) S/.11
13. Se han comprado 400 sacos de harina a S/. 540 la docena, habiéndose pagado S/. 12 600 por transportarlos. ¿Cuántos llegaron malogrados si se tuvo que vender a S/. 100 cada saco para ganar en total S/. 4400?
a) 25 b) 30 c) 35
d) 45 e) 50
14. Un comerciante compró cierto número de cuadernos por S/. 93, vendió una parte de ellos en S/. 24 a S/. 0,60 cada uno, perdiendo S/. 0,15 en cada uno. ¿A cuántos soles debe vender cada cuaderno de los restantes para que en total obtenga una ganancia de S/. 15?
a) 1,30 b) 1,20 c) 1,10
d) 1,00 e) 0,90
15. Un comerciante compra café crudo a S/. 5,40 el kg y lo vende tostado a S/. 7,80 el kg. ¿Cuántos kilogramos de café crudo tendrá que comprar para ganar S/. 388,80, sabiendo que el café pierde la décima parte de su peso al ser tostado.
a) 362 b) 201 c) 240
d) 306 e) 378

CLAVES DE RESPUESTA

1	2	3	4	5
D	A	C	D	E
6	7	8	9	10
C	C	E	B	A
11	12	13	14	15
B	A	E	D	C

Planteo de Ecuaciones

I. Objetivo

Al concluir la unidad el alumno deberá:

1. Representar el lenguaje común al lenguaje simbólico.
2. Desarrollar habilidades de abstracción para plantear y resolver problemas de una o más incógnitas.
3. Plantear y resolver problemas diofánticos.
4. Relacionar los problemas diversos con situaciones reales de la vida común.

II. Sugerencias

1. Se debe leer el problema hasta comprenderlo y luego intentar resolverlo.
2. Determinar las variables con las que se resolverán los problemas
3. Determinación de los datos y las preguntas.
4. Relacionar los datos con las variables
5. Verificación de los resultados

III. Problemas Desarrollados

1. El triple de un número aumentado en seis equivale al doble del número aumentado en 25. Calcular el número.

Resolución

Sea x el número:

$$3(x+6)=2x+25$$

$$3x+18=2x+25$$

$\therefore$

$$\boxed{x = 7}$$

2. Se tiene 60 monedas, unas de 5 soles y otras de 2 soles, con las cuales se paga una deuda de 204 soles. ¿Cuántas monedas más de un valor respecto al otro existen?

Resolución

Sea el # de monedas de 5 soles = x

Sea el # de monedas de 2 soles = y

$$x+y=60$$

$$5x+2y = 204 \rightarrow 3x+2(x+y) = 204$$

$$3x+2(60) = 204$$

$$x = 28 \rightarrow y = 32$$

Respuesta: $\boxed{32-28=4}$

3. Si reparto tantos caramelos a cada niño como niños tengo, me harían falta 2 caramelos; pero si doy 2 caramelos a cada niño, me sobrarían 61 caramelos. ¿Cuántos niños y caramelos tengo?

Resolución

Sea: $C = \#$ de caramelos
 $N = \#$ de niños
 $C = N(N) - 2 = 2N + 61$
 $N^2 - 2N = 63$
 $N(N-2) = 9(7) = 9(9-2)$
 $\therefore N = 9$
 $C = 79$

4. A un número impar se le suma los tres números pares que le preceden y el cuádruplo del número impar que le sigue, obteniéndose 199. ¿Cuál es el menor sumando?

Resolución

Sea el número impar: $2x+1$

Los pares que preceden:

$$2x; 2x-2; 2x-4$$

El impar que sigue: $2x+3$

$$(2x+1) + (2x) + (2x-2) + (2x-4) + 4(2x+3) = 199$$

$$16x+7=199 \rightarrow x=12$$

Respuesta: $2(12) - 4 = 20$

5. En un campeonato de ajedrez escolar de 90 participantes, en la primera fecha, se obtuvo que el número de ganadores era igual al número de empatadores. ¿Cuántas partidas resultaron empatadas?

Resolución

ganadores = x $3x=90$

perdedores = x $x=30$

empatadores = x

Nº de partidas empatadas = $\frac{30}{2} = 15$

Respuesta: 15

6. ¿Cuál es el número tal que al colocarle un cero a la derecha, éste aumenta en 504 unidades?

Resolución

Sea el número: x

$$10x - x = 504$$

$$9x = 504$$

$$x = 56$$

RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

7. Se tienen tres números enteros que multiplicados de dos en dos dan por productos 88, 143 y 104. ¿Calcular la suma de dichos números

Resolución

Sean los números a , b y c

$$ab = 88 = 8 \cdot 11$$

$$ac = 143 = 11 \cdot 13$$

$$bc = 104 = 8 \cdot 13$$

$$\text{Multiplicando: } (a \cdot b \cdot c)^2 = (8 \cdot 11 \cdot 13)^2 \rightarrow abc = 8 \cdot 11 \cdot 13$$

$$\therefore a = 11, b = 8, c = 13$$

Respuesta: $a + b + c = 32$

8. En un corral hay conejos y patos; se cuentan 30 cabezas y 92 patas, ¿cuántos animales de cada especie existen?

Resolución

de conejos = C

$$C + P = 30$$

de patos = P

$$4C + 2P = 92$$

$$2C + 2(C + P) = 92$$

$$C = 16 \text{ y } P = 14$$

9. Tres amigos juegan a los dados, tal que el perdedor duplicará el dinero a los demás; Luis, Juan y José pierden en ese orden, y quedan al final a cada uno con 32 soles. ¿Cuánto tenía cada uno al inicio?

Resolución

	LUIS	JUAN	JOSÉ	
1er	52	28	16	= 96
2do	8	56	32	= 96
3ro	16	16	64	= 96
Quedan	32	32	32	= 96

Luis, Juan y José tienen: 52, 28 y 16, respectivamente.

PROBLEMAS PROPUESTOS

- En las aulas I y II del CEPRE se realiza lo siguiente: del aula I pasan 15 alumnos al salón II, luego del salón II pasan 20 alumnos al salón I. Si al final I y II tienen 65 y 35 alumnos, respectivamente, ¿cuántos alumnos tenía cada salón inicialmente?
a) 60; 40 b) 70; 40
c) 94; 30 d) 88; 30
e) 20; 50
- Tres jugadores: A, B y C juegan a las cartas; el que pierde, duplicará el dinero de los otros dos. Si pierden A, B y C, en ese orden, ¿cuánto tenía "A" al inicio si cada uno termina con 80 soles?
a) 80 b) 130 c) 110
d) 160 e) 40
- Edgard compra cierta cantidad de sandías. A su hermana le regala la mitad de lo que compra más 4 sandías; a su sobrina, la mitad de lo que queda más 2 sandías. ¿Cuántas sandías compró, si le quedan 16 sandías?
a) 52 b) 96 c) 80
d) 48 e) 60
- Luchita cada día gasta la mitad de lo que tiene más S/. 20. Si gastó todo en 4 días, ¿cuál es el promedio de su gasto por día?
a) 200 soles b) 300 soles
c) 120 soles d) 150 soles
e) 60 soles
- En un almacén se observó 90 vehículos entre motos, automóviles y bicicletas. Si se cuenta 80 motores y 300 llantas, ¿cuántas motos habían?
a) 10 b) 30 c) 40
d) 60 e) 20
- La suma de 2 números es 84. Los cocientes de estos números con un tercero son 4 y 6, teniendo por residuos 1 y 3, respectivamente. ¿Calcular la diferencia positiva de estos números?
a) 18 b) 16 c) 17
d) 19 e) 20
- Si doy 5 caramelos a cada uno de mis hermanos sobran 6 caramelos; pero si doy 2 más a cada uno, faltan 8 caramelos. ¿Cuántos hermanos somos?
a) 6 b) 7 c) 8
d) 5 e) 9
- Rosita paga por 2 pollos y 5 pavos un total de S/. 495. Si cada pavo cuesta S/. 15 más que un pollo, ¿cuánto cuesta un pollo y pavo juntos?
a) 120 b) 105 c) 145
d) 135 e) 95
- Sobre un estante se pueden colocar 15 libros de ciencias y 3 libros de letras ó 9 libros de letras y 5 de ciencias. ¿Cuántos libros de ciencias solamente caben el estante?
a) 15 b) 30 c) 18
d) 20 e) 24
- A una reunión asisten 399 personas entre varones, mujeres y niños. Si el número de varones es el quintuplo de mujeres, y éste es el triple que el de los niños, ¿cuántos varones hay?
a) 310 b) 215 c) 210
d) 295 e) 315

RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

11. Dos decenas de libros cuestan tantos soles como libros dan por S/. 2880. ¿Cuánto cuesta cada libro?

a) 12 b) 16 c) 20
d) 9 e) 8

12. Una persona que vendió un caballo en S/. 72 ve que su pérdida es por cada 100 soles que le costó un octavo del número de soles que pagó por dicho caballo. ¿Cuánto costó el caballo, si es mayor que 100?

a) 400 b) 720 c) 360
d) 685 e) 580

13. María tiene "x" billetes de 20 soles, $(x+1)$ billetes de 10 soles y $(x-1)$ billetes de 50 soles. Si ese es todo el dinero que tiene y al cambiarlos a billetes de 100, recibe el mismo número de billetes de 50 soles, que tenía inicialmente; ¿cuántos soles tiene María?

a) 600 b) 300 c) 200
d) 400 e) 500

14. Calcular un número de tres cifras, sabiendo que la suma de las cifras es 6, que es divisible por 11 y que restándole 99 se obtiene el número original, pero invertido el orden de sus cifras?

a) 132 b) 321 c) 123
d) 231 e) 312

15. Si a cada uno de mis amigos le doy tantos chocolates como amigos tengo, me faltan 2 chocolates; pero si doy un chocolate a cada uno, me sobran 70 chocolates. ¿Cuántos chocolates tengo?

a) 9 b) 49 c) 61
d) 78 e) 79

TAREA DOMICILIARIA

1. En un colegio se distribuyen 18 personas por cada aula, quedándose seis alumnos sin aula; si se distribuyen 19 alumnos por cada aula, sobran 4 asientos; si se distribuye 20 alumnos por cada aula, ¿cuántos asientos quedarán vacíos?

a) 14 b) 10 c) 12
d) 11 e) 16

2. Se arrojan tres dados. El resultado del primer dado se multiplica por 7, se suma el resultado del segundo dado y se multiplica todo por 7; por último se suma el resultado del tercer dado, obteniendo en total 268. ¿Cuál es la suma de los resultados de los tres dados?

a) 11 b) 10 c) 12
d) 14 e) 13

3. El pago de un obrero por la semana última es de 250 soles, incluyendo el pago por horas extras. El sueldo asciende a 200 soles más que lo recibido por horas extras. ¿Cuál es el salario del obrero sin las horas extras?

a) 190 soles b) 201 soles
c) 225 soles d) 230 soles
e) 205 soles

4. Se dispone de 100 soles para comprar 40 sellos de colección de S/. 1, S/. 4 y S/. 12. ¿Cuántos sellos de S/. 12 deberán comprarse, si por lo menos se debe comprar un sello de cada clase?

a) 10 b) 96 c) 78
d) 3 e) 8

5. Para la premiación de un concurso infantil se necesita comprar juguetes de dos precios distintos. Los precios eran de 4 y 5 soles, pero debería comprarse la mayor cantidad posible de juguetes. ¿Cuántos niños serían premiados si se debía gastar 131 soles y cada niño recibió un juguete?
a) 30 b) 43 c) 31
d) 35 e) 32
6. Un niño tiene 30 caramelos, que vende a 3 caramelos por 10 soles; otro niño tiene 30 caramelos que vende a 2 por 10 soles. Para evitar competencias, se unen y deciden vender todo a 5 caramelos por 20 soles. ¿Ganan o pierden, y cuánto?
a) Pierden S/.10
b) Ganan 10
c) No gana ni pierden
d) Pierden S/.20
e) Ganan 20
7. Un estudiante quiso comprar cierto número de libros con 720 soles pero al ver que el precio de cada libro había bajado en 2 soles, compró 4 libros más por la misma suma. ¿Cuántos libros compró?
a) 38 b) 40 c) 36
d) 42 e) 48
8. Cuatro hermanos tienen juntos 30 naranjas. Si el número de naranjas del primero se incrementa en 1, el del segundo se reduce en 4, el del tercero se duplica y el cuarto se reduce a la mitad, todos tendrían la misma cantidad de naranjas. ¿Cuántas naranjas tiene el tercero?
a) 10 b) 15 c) 3
d) 12 e) 8
9. A un alambre de 132 cm se le hacen tantos cortes como longitud tiene cada trozo. ¿Cuántas partes iguales se consiguen?
a) 15 b) 11 c) 18
d) 12 e) 14
10. Unos gemelos y unos trillizos tienen edades que suman en total 150 años. Si se intercambian las edades de los gemelos con los trillizos, el total sería de 120 años. ¿Cuántos años tiene cada uno de los trillizos?
a) 50 b) 48 c) 46
d) 44 e) 42
11. Un examen de admisión consta de 50 preguntas; por cada respuesta correcta se le da 4 puntos y por cada respuesta incorrecta le restan un punto. ¿Cuántas preguntas respondió acertadamente un alumno, si después de responder todo el examen obtuvo 150 puntos?
a) 40 b) 42 c) 44
d) 33 e) 30
12. En una granja hay patos, conejos y gallinas. Si en total se cuentan 60 cabezas y 160 patas de animales, ¿cuántos son conejos?
a) 22 b) 20 c) 24
d) 18 e) 72
13. Se dispone de S/. 999 para ser gastados en artículos de S/. 37 y S/. 21, ¿cuántos artículos se adquirieron si el dinero alcanzó exactamente?
a) 40 b) 44 c) 43
d) 42 e) 70

RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

14. En un super mercado, 4 naranjas cuestan lo mismo que 15 plátanos; 10 plátanos lo mismo que 3 manzanas, 12 manzanas, lo mismo que 1 piña. ¿Cuántas naranjas cuestan lo mismo que 3 piñas?
- a) 30 b) 31 c) 33
d) 32 e) 35
15. Cada vez que Carmen se cruza con Miguel, este último duplica el dinero que lleva Carmen. Carmen en retribución le entrega 20 soles. Si se han cruzado 3 veces, luego de los cuales Carmen tiene 260 soles, ¿cuánto tenía Carmen inicialmente?
- a) 18 b) 70 c) 40
d) 60 e) 50

CLAVES DE RESPUESTA

1	2	3	4	5
A	B	C	D	E
6	7	8	9	10
A	B	C	D	E
11	12	13	14	15
A	B	C	D	E

Edades

I. Objetivos

Al concluir la unidad el alumno deberá:

- 1) Relacionar correctamente las edades de una o más personas en el transcurso del tiempo.
- 2) Utilizar convenientemente el "Cuadro de doble entrada" en el proceso de ordenamiento y relación de los datos.
- 3) Plantear problemas de orden literal relacionados con edades de personas.
- 4) Aplicar correctamente las propiedades en la resolución de problemas.

Notas:

- 1) La diferencia de edades de dos personas es constante en el tiempo.
($P - P - F$)
- 2) Edad actual = Año actual - Año de nacimiento. (Si ya se cumplió años)
Edad actual + Año Nacimiento = Año Actual - 1. (Si no se ha cumplido años)

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Cuando Raúl nació, Luisa tenía la tercera parte de lo que Raúl tiene. Si Pola tiene $\frac{10}{9}$ de la edad de Raúl, ¿cuál de los tres es más joven, y qué edad tiene, si la suma de las edades actuales de Raúl y Pola es 38 años?

Resolución

	PASADO	PRESENTE
Raúl	0	9x
Luisa	3x	12x
Pola		10x

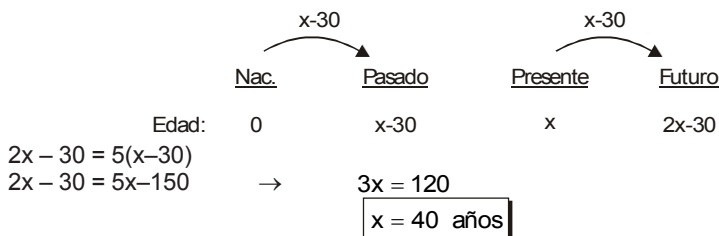
Dato: $9x + 10x = 38 \rightarrow x = 2$ años

El más joven es Raúl con 18 años

RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

2. Cuando transcurran, a partir de hoy, tantos años como los años que pasaron desde que nací hasta hace 30 años, tendré el quintuplo de la edad que tenía en ese entonces. ¿Qué edad tengo?

Resolución



3. Si tú tienes 30 años actualmente, yo tengo el triple de la edad que tenías cuando yo tenía la quinta parte de lo que tú tienes. ¿Cuál es mi edad dentro de 3 años?

Resolución

	Pasado	Presente	Dentro 3
Yo	6	$3x$	$3x+3$
Tú	x	30	

$$x + 3x = 6 + 30$$

$$x = 9$$

Respuesta: $3x+3 = 3(9) + 3 = \boxed{30}$

4. La edad de Luis en 1975 era tanto como la mitad del número formado por las dos últimas cifras del año de su nacimiento ¿Qué edad tendrá en el 2004?

Resolución

Año de nacimiento: $\overline{19ab}$

$$\therefore 1975 - \overline{19ab} = \frac{\overline{ab}}{2}$$

$$1975 - 1900 - \overline{ab} = \frac{\overline{ab}}{2}$$

$$75 = \frac{3}{2}\overline{ab} \rightarrow \overline{ab} = 50$$

* En 2004: $2004 - 1950 = \boxed{54}$

5. Un alumno al ser preguntado por su edad respondió: "Si al doble de mi edad se le quitan 13 años, se obtiene lo que me falta para tener 50 años. ¿Cuál es la edad del alumno?"

Resolución:

Sea la edad "x" años:

$$2x - 13 = 50 - x$$

$$3x = 63$$

$$x = 21 \text{ años}$$

6. Lorena dice que la edad de su hija representa 5 veces la edad que tuvo hace 4 años. ¿Cuál es la edad de la hija de Lorena?

Resolución:

Sea la edad "x" años:

$$x = 5(x - 4)$$

$$20 = 5x - x$$

$$x = 5$$

7. Julia, en el mes de junio, restó a los meses que ha vivido los años que tiene y obtiene 455. ¿En qué mes nació Julia?

Resolución:

Edad = "x" años + "y" meses

$$12x + y - x = 455$$

$$11x + y = 11(41) + 4$$

$$\therefore \text{Nació en el mes: } 6 - 4 = 2 \quad (\text{Febrero})$$

8. Liz le dice a Mary: Mi edad es el triple de la que tú tenías cuando yo tenía la que tú tienes. Cuando tú tengas la edad que yo tengo, tendremos entre las dos 77 años. Calcular las edades de ambas.

Resolución

	<i>Pasado</i>	<i>Presente</i>	<i>Futuro</i>
Liz	y	3x	77 - 3x
Mary	x	y	3x

i) $y + y = x + 3x$

$$y = 2x$$

Edades:

$$3x = 33 \text{ años}$$

$$y = 2x = 22 \text{ años}$$

ii) $3x + 3x = y + 77 - 3x$

$$7x = 77$$

$$x = 11$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Gisella tuvo su primer hijo a los 20 años, su segundo hijo a los 25 años y, 7 años después, a su tercer hijo. Si en 1996 la suma de las edades de los cuatro es 83 años, ¿qué edad tendrá Gisella el 2006?
a) 50 años b) 52 años c) 48 años
d) 49 años e) 51 años
2. Dentro de 15 años la edad de Juan será el doble de la de Juana. Si hace 6 años la edad de Juan era el triple de la de Juana. Calcular la suma de edades de ambos.
a) 90 b) 96 c) 94
d) 92 e) 88
3. La suma de las edades de Edgar y Luz cuando nació Cirilo, su primer hijo, era la mitad de su suma actual. Si actualmente Cirilo tiene 20 años, ¿qué edad tenía Cirilo cuando las edades de los tres sumaban 70 años?
a) 14 b) 18 c) 10
d) 12 e) 15
4. Yo tengo la edad que tú tendrás cuando yo tenga el triple de la edad que tú tuviste cuando yo tuve la mitad de la edad que tengo ahora. Si actualmente nuestras edades suman 45 años, ¿cuántos años tengo?
a) 20 b) 21 c) 26
d) 24 e) 28
5. Un alumno nació en el año $\overline{19xy}$ y en 1980 tuvo " $x+y$ " años. ¿En qué año tuvo " $2x+y$ " años?
a) 1988 b) 1983 c) 1984
d) 1985 e) 1986
6. Un abuelo, el hijo y el nieto tienen juntos 100 años. El abuelo dice "Mi hijo tiene tantas semanas como mi nieto días, y mi nieto tiene tantos meses como yo tengo años. La edad del abuelo es:
(Considerar 1 mes = 30 días)
a) 68 b) 70 c) 72
d) 66 e) 60
7. Si al año que cumplí los 12 años le sumas el año en que cumplí los 20 años y a dicha suma le restas la suma del año que nací con el año actual, obtendrás 6. ¿Qué edad tengo?
a) 26 b) 24 c) 28
d) 22 e) 20
8. La suma de las edades de dos amigas es 30 años. Si dentro de 10 años la edad de uno será el doble de la edad que tuvo la otra hace 10 años, ¿cuál es la edad de cada amiga?
a) 16 y 24 b) 13 y 17 c) 20 y 10
d) 12 y 18 e) 15 y 15
9. Las edades de dos amigos hace " k " años estaban en la relación de 1 a 3; actualmente sus edades están en la relación de 4 a 7. Si dentro de " $2k$ " años sus edades sumaran 126, calcular la suma de sus edades dentro de " k " años.
a) 98 b) 91 c) 86
d) 96 e) 112
10. Lucy tenía 22 años cuando Nora nació. Ambas edades suman hoy 30 años más que la edad de Inés, que tiene 42 años. ¿Qué edad tiene Jaime, que nació cuando la suma de las edades de las tres mujeres era 54 años?
a) 12 años b) 13 años c) 16 años
d) 21 años e) 20 años
11. Las edades de Ana y María suman 48 años; y María tiene el doble de edad que tenía Ana cuando María tenía la mitad de la edad que Ana tendrá cuando Ana tenga tres veces la edad que María tenía cuando su edad era tres veces la de Ana de ese entonces. ¿Cuántos años tiene María?
a) 29 años b) 26 años c) 27 años
d) 30 años e) 28 años
12. La bisabuela de Edgard tiene 80 años actualmente; y tenía 15 años cuando nació la abuela de Edgard. La mamá

de Edgard dice "tu abuela tiene 45 años más que tú y tú tienes 18 años menos que yo". ¿Qué edad tiene la madre de Edgard?

- a) 32 años b) 38 años c) 35 años
d) 36 años e) 40 años

13. Las edades de Ana, Bertha y Carmen son entre si como a los números 6, 8 y 11, respectivamente. Si hace 6 años la edad de Ana era la mitad de la edad que tendrá Bertha dentro de 4 años, entonces Carmen es mayor que Bertha en:

- a) 16 años b) 5 años c) 12 años
d) 8 años e) 10 años

14. Si la edad de Ángel es la mitad de la edad de Cucho y la edad de Miguel es el doble de la edad de Cucho, ¿quién es el mayor y quién es el menor, respectivamente?

- a) Miguel y Cucho
b) Cucho y Ángel
c) Cucho y Miguel
d) Miguel y Ángel
e) Ángel y Cucho

15. Una persona multiplica la fecha del día de su nacimiento por 12 y el número del mes por 31. Si la suma de estos productos es 170. Determinar la fecha de nacimiento de dicha persona.

- a) 6 de enero
b) 4 de abril
c) 7 de marzo
d) 5 de mayo
e) 9 de febrero

TAREA DOMICILIARIA

1. La edad de Luis en años, cuando se le suma 1, es múltiplo de 2; si se le quita 6, es múltiplo de 7; cuándo se le agrega 1 es múltiplo de 10. ¿Cuántos años tendrá Luis dentro de 10 años?
- a) 79 b) 89 c) 69
d) 68 e) 74
2. Alberto no es un cuarentón, pero pronto lo será. Si se escribe tres veces seguidas su edad se obtiene un número que es el producto de su

edad multiplicado por la de su esposa y la de sus cuatro hijos. ¿Qué edad tiene la esposa?

- a) 9 b) 37 c) 38
d) 47 e) 40

3. En el año 1996, la edad de una persona coincidía con la mitad de la cantidad que expresa las dos últimas cifras del año de su nacimiento. Calcular la edad en el 2005.

- a) 64 años b) 40 años
c) 41 años d) 35 años
e) 63 años

4. Jhon, en el mes de setiembre, resta los años que tiene de los meses que ha vivido y obtiene 414 meses. Si es mayor que Antonio, su hijo, en 326 meses, ¿en qué mes nació Antonio?

- a) Enero b) Febrero c) Marzo
d) Abril e) Mayo

5. Rita y Carlos se casaron hace 6 años, cuando sus edades estaban en la proporción de 13 a 11; tuvieron su primer hijo hace 4 años, cuando sus edades estaban en la proporción de 7 a 6. Si su hijo terminará la educación secundaria a los 15 años, ¿qué edad tendrá en ese entonces su padre?

- a) 37 b) 38 c) 40
d) 39 e) 41

6. Cuando Beto nació, Braulio tenía 30 años. Ambas edades suman ahora 18 años más que la edad de Carlos, que tiene 60 años. Calcular la edad de Daniel, si nació cuando Beto tenía 15 años.

- a) 2 años b) 5 años c) 3 años
d) 6 años e) 9 años

7. Tú tienes la mitad, menos 5 años de la edad que yo tendré cuando tu tengas lo que yo tenía cuando tú tenías la cuarta parte de la edad que yo tuvieses, si tendría 10 años más de los que yo tendré. Pero si yo tuviese 10 años más de los que tendré y tú los que te he dicho que tienes, entonces entre ambos tendríamos 80 años. ¿Qué edad tienes?

- a) 20 años b) 40 años c) 30 años
d) 25 años e) 10 años

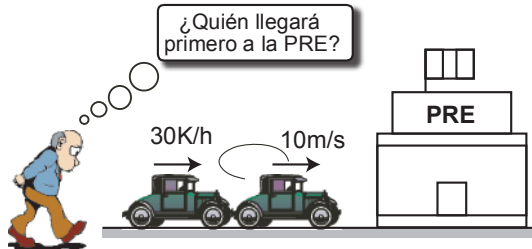
RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

8. Un hermano le comenta al otro: "El cuadrado de mi edad a restarse con el cuadrado de tu edad resulta 123 años" su hermano le responde: "El mismo resultado se obtiene si restamos el cuadrado de la edad de nuestra madre del cuadrado de la edad de nuestro padre". ¿Qué edad tenía la madre cuando nació su hijo menor?
- a) 44 b) 22 c) 42
d) 40 e) 41
9. A Pepe le preguntan por su edad y el contesta: "Mi edad más dos veces mi edad, más tres veces mi edad y así sucesivamente, hasta tantas veces como años tengo, suman en total 4200. ¿Cuál es la edad de Pepe?
- a) 40 años b) 15 años c) 30 años
d) 20 años e) 25 años
10. ¿Dentro de cuántos años tendré la edad que tú hubieras tenido hace 5 años si hubieses nacido 9 años antes?, si yo nací 10 años después que tú?
- a) 15 b) 6 c) 18
d) 14 e) 12
11. Relata una abuelita que un antepasado suyo le ocurrió algo muy curioso y es que tuvo " k " años en el año " k^3 ". Además contó que este antepasado suyo vivió hasta el año 1800 ¿En qué año nació el antepasado?
- a) 1725 b) 1720 c) 1718
d) 1750 e) 1716
12. Hace 7 años el doble de tu edad era igual a la mitad de mi edad en ese entonces. Dentro de 23 años, el cuádruple de mi edad será igual a seis veces tu edad en ese entonces. ¿Cuántos años tienes?
- a) 13 b) 24 c) 15
d) 30 e) 12
13. Don Lucho dice: "No soy un joven pues paso los 60 años, pero aun soy vigoroso; así que no pueden llamarme noventón. Cada uno de mis hijos me ha dado tantos nietos como hermanos tienen". ¿Qué edad tiene Don Lucho, si su edad está representada por la cantidad de nietos que tiene?
- a) 63 años b) 72 años c) 69 años
d) 63 años e) 75 años
14. Carmen le dice a Dora: "Yo tenía la tercera parte de la edad que tú tienes, cuando tú renías la mitad de la edad que tengo, además cuando tú tengas la edad que tengo la suma de nuestras edades será 45 años, ¿Qué edad tiene Carmen?
- a) 20 años b) 22 años c) 24 años
d) 27 años e) 25 años
15. La edad de un padre sobrepasa en 5 años a la suma de las edades de sus tres hijos. Dentro de 10 años, él tendrá el doble de la edad del hijo mayor; dentro de 20 años, tendrá el doble de la edad del segundo; y dentro de 30 años, tendrá el doble de la edad del tercero. ¿Cuál es la edad del padre?
- a) 45 años b) 38 años c) 48 años
d) 50 años e) 52 años

CLAVES DE RESPUESTA

1	2	3	4	5
A	B	C	D	D
6	7	8	9	10
E	A	B	D	D
11	12	13	14	15
E	A	B	C	D

Móviles



Los problemas referentes a móviles consideran a carros, trenes, aviones o personas; asimismo, hacen mención a metros por segundo, kilómetros por hora o a cualquier otra terminología relacionada con el movimiento.

Estos problemas se resuelven básicamente con la fórmula:

$$\text{Distancia} = \text{Rapidez} \times \text{Tiempo}$$

Que corresponde a un movimiento uniforme. Además:



$$e = v \cdot t \qquad v = \frac{e}{t} \qquad t = \frac{e}{v}$$

e = espacio o distancia recorrida

v = rapidez empleada

t = tiempo empleado

Definiciones Importantes:

- Rapidez** (v). Característica física de un móvil que nos informa qué tan rápido este móvil pasa de una posición a otra. Se expresa en unidades de longitud por tiempo (e/t); ejemplos: m/s, m/min; km/h.
- Velocidad** ($\vec{v}$). Es una magnitud vectorial que nos indica la rapidez con la que se mueve un objeto (móvil) y la dirección en que lo hace.

RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

Para la solución de estos problemas debemos tener cuidado que las unidades sean consistentes; por ejemplo, si la rapidez está expresada en m/s, el tiempo debe estar en segundos y la distancia en metros.

Ejemplo 1:

Cinco horas demora un auto en viajar de Lima a Huancayo a razón de 80 km/h. Si cada 10 km en la carretera que une ambas ciudades se desea colocar un banderín, ¿cuántos banderines se requieren, considerando que debe haber uno al principio y otro al final?

Resolución

Debemos primero calcular la distancia entre Lima y Huancayo, para lo cual contamos con la rapidez con que viaja el auto y el tiempo que emplea; por lo tanto:

$$d = v \times t = \frac{80 \text{ km}}{\text{h}} \times 5 \text{ h}$$
$$d = 400 \text{ km}$$

Cálculo del número de banderines a colocar; para lo cual tenemos:

$$d_T = 400 \text{ km}$$
$$d_u = 10 \text{ km}$$
$$N^\circ \text{ banderines} = \frac{400}{10} + 1 = \boxed{41}$$

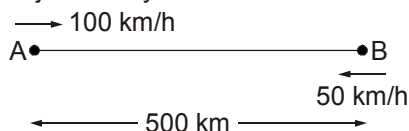
Rapidez Promedio

Se refiere a la distancia total recorrida dividida entre el tiempo total empleado.

$$v_p = \frac{\text{Distancia Total}}{\text{Tiempo Total}}$$

Ejemplo 2:

Un auto viaja de una ciudad "A" a otra "B", distantes en 500 km, a razón de 100 km/h; y regresa hacia "A" con una rapidez de 50 km/h. Hallar la rapidez promedio durante el viaje de ida y vuelta.



Resolución

Tiempo de viaje de ida: $t_i = \frac{500\text{km}}{100\text{km/h}} = 5\text{h}$

Tiempo de viaje de regreso: $t_r = \frac{500\text{km}}{50\text{km/h}} = 10\text{h}$

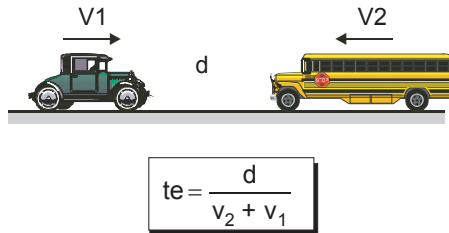
$\Rightarrow$ Tiempo total = 5 + 10 = 15h

Distancia total recorrida = 500 + 500
= 1000km

$\therefore v_{\text{prom}} = \frac{1000\text{km}}{15\text{h}} = \frac{200}{3} = 66\frac{2}{3}\text{km/h}$

Tiempo de encuentro

Si dos móviles parten simultáneamente de diferentes puntos y viajan en la misma dirección pero en sentidos opuestos, una al encuentro del otro, se encontrarán en un tiempo t_e , definido por:



Donde:

t_e : tiempo de encuentro.

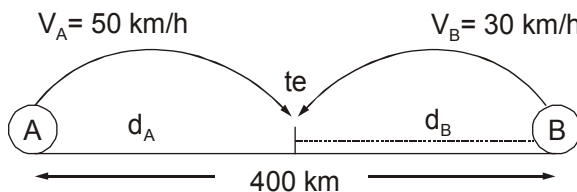
d : distancia que los separa al inicio.

v_2 ; v_1 : rapidez con la que viajan los móviles.

Ejemplo 3:

La distancia entre dos ciudades es de 400 km. Un auto parte de la ciudad "A" hacia "B" a razón de 50 km/h, y en el mismo instante parte de "B" hacia "A" otro auto a razón de 30 km/h. ¿Después de cuánto tiempo se encontrarán y a qué distancia del punto "B"?

Resolución



RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

Cálculo del tiempo de encuentro:

$$te = \frac{400\text{km}}{(50 + 30)\text{km/h}} = \frac{400\text{km}}{80\text{km/h}} = 5\text{h}$$

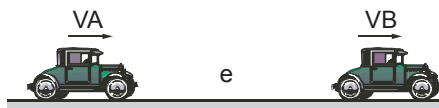
Cálculo de la distancia de B hasta el punto de encuentro:

$$d_B = V_B \times te = 30\text{ km/h} \times 5\text{h}$$

$$= \boxed{150\text{ km}}$$

Tiempo de Alcance

Si dos móviles parten simultáneamente y viajan en la misma dirección, y en el mismo sentido y el segundo viaja con mayor rapidez, entonces lo alcanzará al primero en un tiempo; ta , definido por:



$$ta = \frac{d}{v_2 - v_1}$$

Donde:

ta : tiempo de alcance

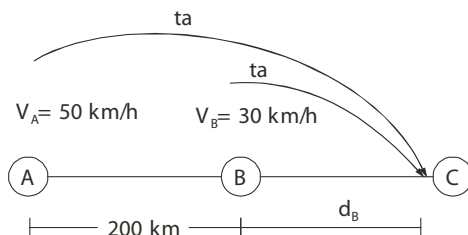
d : distancia que los separa al inicio

v_2 ; v_1 : rapidez con la que viajan los móviles

Ejemplo 4:

La distancia entre dos ciudades es de 200 km. Un auto parte de la ciudad "A" hacia otra "C", situadas a 350 km al Este de "B", a razón de 50 km/h; en el mismo instante parte de "B" otro auto hacia "C"; a razón de 30 km/h. ¿Después de cuánto tiempo alcanzará el móvil que partió de "A" al que partió de "B" y a qué distancia de "C"?

Resolución



Cálculo de tiempo de alcance:

$$t_a = \frac{200\text{km}}{(50 - 30)\text{km/h}} = \frac{200}{20} = 10\text{h}$$

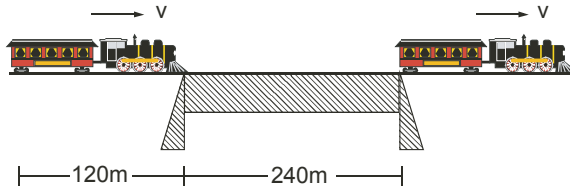
Distancia recorrida por B:

$$d_B = \frac{30\text{km}}{h} \times 10\text{h} = 300\text{km} \rightarrow \text{Se da el alcance a 50 km de C}$$

Ejemplo 5:

Un tren de 120 m de longitud se demora en pasar por un puente de 240 m de largo, 6 minutos. ¿Cuál es la rapidez del tren?

Resolución



La distancia total que recorre el tren para cruzar es:

$$240\text{ m} + 120\text{ m} = 360\text{ m}$$

En un tiempo de 6 min (360 seg)

$$v = \frac{360\text{m}}{360\text{seg}} = \boxed{1\text{m/seg}}$$

Ejemplo 6:

Luis viajó de Lima a Huancayo empleando 8 horas. Si al regreso aumenta su rapidez en 15 km/h llegando en 6 horas, ¿cuál es la distancia total recorrida?

Resolución

A la ida recorre una distancia «D» con una rapidez de "v" km/h llegando en 8h.

$$\Rightarrow D = 8v \quad \dots \text{(I)}$$

A la vuelta recorre la misma distancia «D» con una rapidez de (v + 15) km/h llegando en 6h.

$$\Rightarrow D = 6(v+15) \quad \dots \text{(II)}$$

RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

Como (I) y (II) son iguales, tenemos:

$$8v = 6(v + 15)$$

$$8v = 6v + 90$$

$$2v = 90$$

$$\Rightarrow v = 45 \text{ km/h}$$

$$\therefore \text{Distancia total recorrida} = 2D$$

$$\text{En (I)} = 2(8,45) = 720 \text{ km}$$

Ejemplo 7:

La distancia entre T y L es de 550 km. Abner sale de T a L y Josué de L a T, ambos simultáneamente a las 10 p.m. El ómnibus en que viaja Abner recorre a un promedio de 90 km por hora y el de Josué a 85 km por hora ¿A qué hora y a qué distancia de T se cruzarán?

Resolución



Para saber a que hora se cruzan, aplicaremos tiempo de encuentro:

$$t_e = \frac{550 \text{ km}}{(90 + 85) \text{ km/h}} = 3.14 \text{ h} = 3 \text{ h } 09 \text{ min}$$

$\Rightarrow$ Se cruzarán a:

10 pm + 3h 9 minutos

1:09 am

$$D_T = 90 \times 3.14 = 282 \text{ km } 857 \text{ m}$$

Ejemplo 8:

Un ladronzuelo corre a razón de 8m/s. Un policía que se encuentra a 150 m de distancia empieza a perseguirlo y logra alcanzarlo luego de 4 min. ¿Con qué rapidez corrió el policía?

Resolución

Aplicando tiempo de alcance:

$$t_a = \frac{d}{v_p - v_e}$$

$$t_a = 4 \text{ min} \Rightarrow (4 \times 60) \text{ seg} = \frac{150 \text{ m}}{(V_p - 8) \text{ m/s}}$$

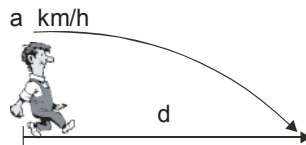
$$240 = \frac{150}{V_p - 8}; \text{ simplificando: } 8 = \frac{5}{V_p - 8}$$

$$8V_p - 64 = 5$$

Ejemplo 9:

«Vladi» sale de su casa con una rapidez de «a» km/h; y dos horas más tarde, «Fuji» sale a buscarlo siguiendo la misma ruta, con una rapidez de «a+b» km/h. ¿En cuántas horas lo alcanzará?

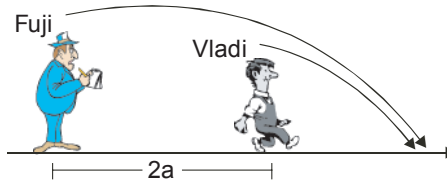
Resolución



«Vladi» en 2 horas le ha tomado una ventaja de:

$$d = v \cdot t$$

$$d = 2a$$



Que «fuji» debe descontarlo en:

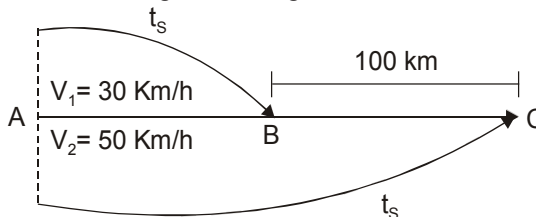
$$t_a = \frac{d}{V_f - V_v} = \frac{2a}{(a + b) - a} = \boxed{\frac{2a}{b}}$$

Ejemplo 10:

Dos motociclistas parten de un punto "A", en el mismo sentido, a razón de 30 y 50 km/h. ¿Qué tiempo deberá transcurrir para que estén separados 100 km?

Resolución

Con los datos hacemos el siguiente diagrama:



$$t_s = \frac{ds}{V_2 - V_1} = \frac{100 \text{ km}}{(50 - 30) \text{ km/h}} = \boxed{5h}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

- Dos móviles están separados por 300 m y avanzan en direcciones opuestas con velocidades de 10 y 15 m/s, separándose cada vez más. ¿En cuánto tiempo estarán separados 9300 m?
a) 36 seg b) 6 min c) 1 h
d) 12 min e) 45 seg
- Dos móviles "A" y "B" parten simultáneamente de un mismo punto de partida y se dirigen en un mismo sentido a velocidades de 30 y 20 m/s, debiendo llegar a un árbol que se encuentra a 300 m delante de ellos y luego retornar al punto de partida. ¿Después de que tiempo se logran encontrar?
a) 16 seg b) 14 seg c) 8 seg
d) 10 seg e) 12 seg
- Calcular el tiempo que emplea en pasar completamente por un túnel de 250 m, un tren de 50 m de longitud a una velocidad constante de 36 km/h.
a) 30 seg b) 40 seg c) 10 seg
d) 60 seg e) 70 seg
- Un tren demora 13 seg para pasar por delante de un semáforo y 25 seg en cruzar un puente de 600 m. Calcular la longitud del tren.
a) 650 m b) 600 m c) 550 m
d) 500 m e) 450 m
- Sabemos que la distancia entre Chiclayo y Lima es de 660 km. Un ómnibus sale de Chiclayo a Lima y otro viceversa al mismo tiempo. El primer omnibus recorre a una velocidad de 85 km/h y el segundo a 80 km/h. ¿A qué distancia de Chiclayo se encontrarán?
a) 320 km b) 330 km c) 340 km
d) 350 km e) 360 km
- Dos trenes cuyas longitudes son de 200 y 250 m viajan en vías paralelas y en el mismo sentido cuyas velocidades son de 45 y 81 km/h.
¿En qué tiempo el segundo tren logra pasarlo al primero?
a) 45 seg b) 40 seg c) 35 seg
d) 30 seg e) 25 seg
- Del problema anterior asumir que viajen en sentido contrario. ¿Cuánto demorarán en cruzarse?
a) 14,9 seg b) 12,8 seg c) 11 seg
d) 9,6 seg e) 8,8 seg
- Un tren salió de una estación a las 3 p.m. y viajó a 100 km/h; otro tren salió de la misma estación a las 4 p.m. y viajó en la misma dirección a 125 km/h. ¿A qué hora lo alcanzó?
a) 6 h b) 6:30 c) 7:00
d) 7:30 e) 8:00
- «Medoly calculó que si viajaba a 10 km/h, llegaría una hora después del medio día para encontrarse con su "media naranja", pero si fuera a 15 km/h, llegaría una hora antes de mediodía. ¿A qué velocidad debe viajar para llegar a las 12 m?
a) 13 km/h b) 12 c) 12,5
d) 13,5 e) 11
- En la esquina de la Av. Tacna y Colmena, María Luisa y Florentino dan por terminado su idilio amoroso y parten en forma perpendicular cada uno a velocidades de 3 y 4 m/s, respectivamente. ¿Después de que tiempo se encuentran separados 300m?
a) 1 min b) 2 c) 3
d) 4 e) 5
- Todos los días sale de Trujillo a Lima un ómnibus con velocidad de 100km/h; éste se cruza diariamente a las 12 m con un ómnibus que sale de Lima con velocidad de 50km/h. Cierta día el ómnibus que sale de Trujillo encuentra malogrado al otro a las 14 horas. ¿A qué hora se malogró el ómnibus que sale de Lima?
a) 6 a.m. b) 7 c) 8
d) 9 e) 10

12. En una pista circular de 300 m dos ciclistas parten juntos en sentido contrario y se cruzan al cabo de 20 segundos. Después de 5 segundos llega el más veloz al punto de partida. ¿Cuál es la velocidad del otro ciclista?
a) 9 m/s b) 6 c) 3
d) 10 e) 11
13. Dos atletas corren en una pista circular de 90 m de circunferencia y en el mismo sentido. El primero tiene 20 m de ventaja y corre 5 m/s y el segundo a 3 m/s. Calcular la suma de las distancias recorridas hasta su encuentro.
a) 260m b) 270 c) 280
d) 290 e) 300
14. Dos corredores, A y B, parten al mismo tiempo en sentidos contrarios en un circuito cerrado; a los 10 minutos se encuentran, luego de 15 minutos "A" llega al punto de partida. ¿Cuál es la velocidad de "A" si sabemos que la de "B" es 300 m/min?
a) 160 m/min b) 170
c) 180 d) 190
e) 200
15. Un corredor da una vuelta completa a una pista circular cada 40 s; otro corredor recorre la pista en sentido contrario y se cruza con el anterior cada 15 s. ¿Qué tiempo emplea el segundo corredor en dar una vuelta completa a la pista?
a) 28 seg b) 26 c) 20
d) 24 e) 30
2. Un móvil ha estado desplazándose durante 14 horas. Si hubiera desplazado una hora menos, con una velocidad mayor en 5 km/h, habría recorrido 1 km menos. ¿Cuál es su velocidad?
a) 60 km/h b) 66 c) 80
e) 50 e) 90
3. Dos atletas parten desde un mismo punto siguiendo trayectorias rectilíneas, perpendiculares entre sí, con velocidades, de 6 y 8 m/s. ¿Después de qué tiempo ambos móviles están separados 200 m?
a) 1s b) 10 c) 16
d) 18 e) 20
4. Un tren, para atravesar un túnel de 900 m de largo tarda 76 s y en pasar delante de un observador tarda 16 s. ¿Cuál es la longitud del tren?
a) 230m b) 240 c) 250
d) 260 e) 280
5. Dos trenes, uno de ellos de doble de longitud que el otro, tarda en pasarse cuando van en el mismo sentido 36 s y cuando van en sentido contrario 4 s. ¿Cuál es la relación de sus velocidades?
a) 5/4 b) 3/4 c) 5/3
d) 4/3 e) 1/2
6. Dos trenes cuyas longitudes son 147 y 103 m, marchan sobre vías paralelas en el mismo sentido. Si la velocidad del primero es de 48 km/h y el segundo demoró 50 segundos en pasarlo, calcular la velocidad del otro en km/h.
a) 56 b) 60 c) 72
d) 80 e) 66
7. Un tren de 200 m de longitud, pasa por un puente de 600 m de largo, a una velocidad de 40 m/s. ¿Cuál es el tiempo que emplea el tren en cruzarlo?
a) 30 s b) 15 s c) 20 s
d) 17,5 s e) N.A.

TAREA DOMICILIARIA

1. Dos móviles parten de un mismo punto y se mueven con velocidades de 20 y 30 m/s; delante de ellos, a 300 m, hay un árbol. ¿Después de que tiempo los móviles equidistan del árbol?
a) 12 seg b) 18 c) 20
d) 14 e) 16

RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

8. Un tren de «x» m de longitud, se demora 8 s en pasar frente a un observador y el triple del tiempo en pasar por un puente de 800 m de largo. ¿Cuál es la longitud del tren?
a) 0,8 km b) 4000 m c) 400 km
d) 0,4 km e) 300 m
9. Para ir de "A" a "B", Vanessa camina a razón de 70km/h y para regresar de "B" a "A", utiliza una velocidad de 30 km/h. Hallar el espacio total recorrido por Vanesa, sabiendo que en total su viaje le ha tomado 20 horas.
a) 800 km b) 840 km c) 680 km
d) 420 km e) 760 km
10. Denisse recorre el tramo MN en 20 horas; si quisiera hacerlo en 25 horas, tendría que disminuir su velocidad en 8 km/h, entonces el tramo MN mide:
a) 32 km b) 600 km c) 1000 km
d) 33 km e) 800 km
11. A las 7 a.m. sale un auto hacia el sur, corriendo a una velocidad de 63 km/h. A las 11 a.m. sale en pos el primero un segundo auto que va a una velocidad de 91 km/h. ¿A qué hora lo alcanzará?
a) 8 p.m. b) 6p.m. c) 7 p.m.
d) 4 p.m. e) 9 p.m.
12. Liliana y Martín están separados por 540 m. Lili parte primero al encuentro de Martín con una velocidad de 17 m/s. Calcular el tiempo que demorarán en encontrarse. Si cuando Lili ya había recorrido 40 m, recién parte Martín con una velocidad de 8 m/s. El tiempo pedido desde que sale Martín es:
a) 25 s b) 20 s c) 35 s
d) 40 s e) 50 s
13. Un automóvil y un peatón están separados por una distancia de $a^2 - b^2$ km. Si parten al mismo tiempo uno al encuentro del otro, el automovilista a una velocidad de «a» km/h, ¿cuál será la velocidad del peatón en km/h si tardaron en encontrarse (a-b) horas?
a) a-b b) 2a-b c) -(a-b)
d) 2b-a e) b
14. Un hombre camina de "A" hacia "B"; el primer día avanza 110 km, el segundo día 80 km y el tercer día retrocede 120 km. ¿Cuántos kilómetros caminó en tres días?
a) 470 b) 90 c) 310
d) 19 e) 230
15. Juan ha recorrido los $\frac{3}{5}$ del camino que une «A» con «B». Si aún le faltan por recorrer "n" km y lleva caminando 7 horas, ¿cuál es la velocidad de Juan en km/h?
a) $56n/7$ b) $6m/14$ c) $6n/21$
d) $5n/21$ e) $3n/14$

CLAVES DE RESPUESTA

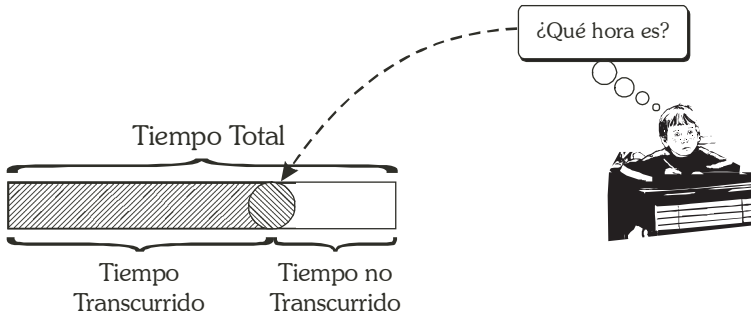
1	2	3	4	5
A	B	E	B	A
6	7	8	9	10
E	C	D	B	E
11	12	13	14	15
A	B	E	E	E

Cronometría

Capítulo relacionado en gran parte con el tema de Planteo de Ecuaciones y Razonamiento Lógico.

Los relojes y su utilidad para la medición del tiempo son motivo de una gran variedad de problemas y acertijos que, para un mejor estudio, se trata como tema aparte, teniendo en cuenta los siguientes objetivos específicos.

1. Analizar y comprender la relación entre el tiempo transcurrido y el tiempo no transcurrido, para un tiempo determinado.



Ejemplo 1:

¿Qué hora es cuando la parte transcurrida del día es igual a las $\frac{3}{5}$ de lo que falta para terminar el día?

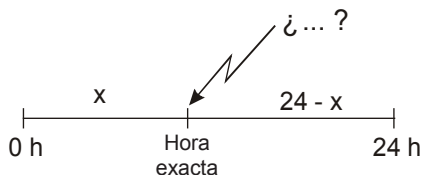
Resolución

Un día : 24 horas

Tiempo transcurrido: x

Tiempo que falta transcurrir: $24 - x$

Gráficamente:



RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

Planteando una ecuación, tenemos:

«Parte transcurrida» «es» $\frac{3}{5}$ («falta para terminar»)

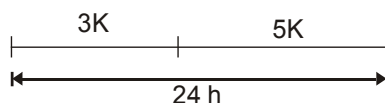
$$x = \frac{3}{5}(24 - x)$$

$$5x = 72 - 3x$$

$$8x = 72 \quad \Rightarrow x = 9$$

$$\therefore \text{Hora} = 9\text{h.} = \boxed{9\text{a.m.}}$$

Otra forma: $\frac{\text{tiempo transcurrido}}{\text{t. que falta transcurrir}} = \frac{3}{5}$



$$3k + 5k = 24$$

$$k = 3$$

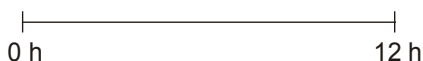
$$\Rightarrow \text{Hora} = 3(3) = \boxed{9 \text{ horas}}$$

Ejemplo 2:

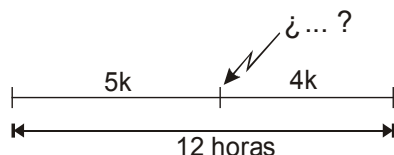
A qué hora de la mañana el tiempo que marca un reloj es igual a de lo que falta para las 12 del mediodía.

Resolución

En el primer ejemplo, el intervalo de tiempo involucrado era todo el día (24 horas); en este caso es sólo el medio día, es decir:



$$\frac{\text{Tiempo transcurrido}}{\text{Tiempo que falta t.}} = \frac{5}{4}$$



$$9k = 12$$

$$k = \frac{4}{3}$$

$\Rightarrow$ Las horas transcurridas son:

$$5\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}\text{h}$$

6 horas 40 min.

$\therefore$ Hora que marca el reloj = 6:40 a.m.

RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

Ejemplo 4:

Un reloj se adelanta 2 min cada 15 min. Si este desperfecto ocurre ya hace 7 horas, que hora marcará las agujas de tal reloj si la hora exacta es 3 h 58 min.

Resolución

Aplicando «regla de tres simple».

Si se adelanta 2 min en 15 min; en 7 horas ($7 \times 60 = 420$ min), ¿Cuánto se habrá adelantado?

$$\begin{array}{rcl} \text{Se adelanta:} & 2 \text{ min} & \frac{\quad}{\quad} 15 \text{ min} \\ & x & \frac{\quad}{\quad} 420 \text{ min} \\ & & x = \frac{2 \times 420}{15} = 56 \text{ min} \end{array}$$

⇒ La hora marcada, aplicando

HM = HR + Adelanto, será:

$$\text{HM} = 3\text{h } 58 \text{ min} + 56 \text{ min}$$

$$\text{HM} = \boxed{4\text{h } 54 \text{ min}}$$

Ejemplo 5:

Hace 10 horas que un reloj se atrasa 3 min cada media hora. ¿Cuál es la hora exacta si el reloj indica las 11 h 28 min?

Resolución

Aplicando «Regla de Tres Simple»:

$$\begin{array}{rcl} \text{Se atrasa:} & 3 \text{ min} & \frac{\quad}{\quad} 1/2 \text{ hora} \\ & x & \frac{\quad}{\quad} 10 \text{ horas} \\ & & x = \frac{3 \cdot 10}{1/2} = 60 \text{ min} = 1 \text{ hora} \end{array}$$

⇒ hora exacta (hora real), aplicando:

HR = HM + atraso, será:

$$\text{HR} = 11\text{h } 28 \text{ min} + 1 \text{ hora}$$

$$\text{HR} = \boxed{12\text{h } 28 \text{ min}}$$

Ejemplo 6:

Un reloj se adelanta 5 min cada 18 horas a partir de las 8 a.m. ¿Cuánto tiempo deberá transcurrir para que vuelva a dar la hora correcta?

Resolución

Para resolver este problema debemos tener presente que: para que un reloj vuelva a marcar la hora correcta deberá adelantarse (atrasarse) en total 12 horas (720 min).

Entonces, resolviendo por «Regla de Tres Simple», tenemos:

Se adelanta: 5 min 18h
 720 min x

$$x = \frac{720 \times 18}{5} = 144 \times 18 \text{ horas}$$

Qué en días será:

$$\frac{144 \times 18}{24} = \boxed{108 \text{ días}}$$

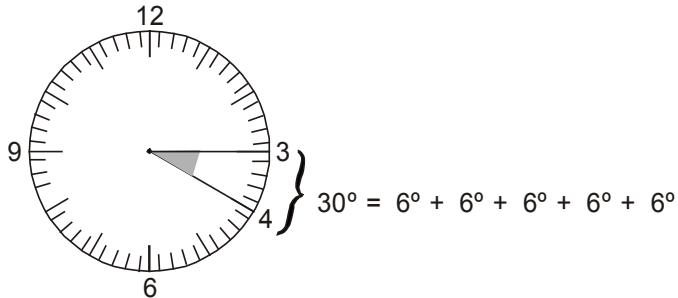
3. Estudio del Reloj y sus Manecillas

Equivalencia entre espacio, ángulo y tiempo (1 vuelta).

<u>Espacio (div)</u>		<u>Ángulo</u>		<u>Tiempo (min.)</u>
60	< >	360°	< >	60
30	< >	180°	< >	30
15	< >	90°	< >	15
5	< >	30°	< >	5

$$\boxed{1 \text{ div} < > 6^\circ < > 1 \text{ min}}$$

$$1d = 6^\circ = 1$$



Relación entre el espacio recorrido por la manecilla del horario y minuter (en 1 hora).

El minuter recorre 60 divisiones en el mismo tiempo que el horario recorre 5 divisiones; por lo tanto, se puede escribir una relación:

$$\frac{EH}{EM} = \frac{5 \text{ div}}{60 \text{ div}} \quad \Rightarrow \quad \frac{EH}{EM} = \frac{1}{12} = \frac{x}{12x}$$

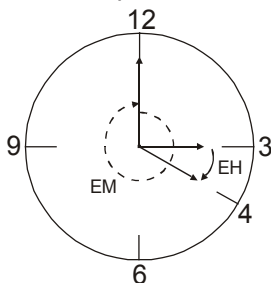
EH = Espacio recorrido por el horario.

EM = Espacio recorrido por el minuter (en 1 hora).

RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

Ejemplo:

Desde las 3 en punto hasta las 4 en punto.



También:

En 60 min el horario avanza $\left(\frac{60}{2}\right) = 30^\circ$

En "M" min el horario avanza $\left(\frac{M}{2}\right)$

Ángulo que forman las manecillas del reloj (Horario – Minutero):

Cuando el reloj marca las «H» horas «M» minutos o abreviadamente H, M; el ángulo "α", formado por el horario y el minutero, se obtiene directamente con la siguiente fórmula:

$$\alpha = \mp 30H \pm \frac{11}{2} (M)$$

Donde:

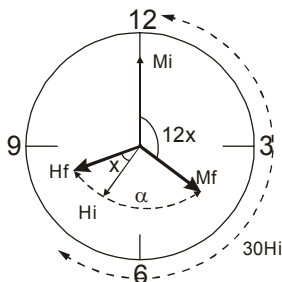
H : hora de referencia

M : # de minutos transcurridos a partir de la hora de referencia

α : Medida del ángulo que forman las manecillas del reloj (en grados sexagesimales)

Caso I:

Cuando el horario adelanta al minutero



Para las H horas y M minutos, de la figura se observa que:

$$12x + \alpha = 30H + x$$

↑
Última hora pasada por el horario

Transponiendo términos, obtenemos:

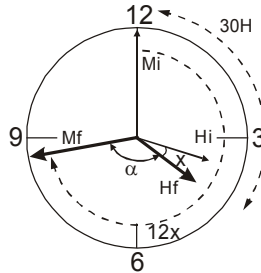
$$\alpha = 30H - 11x$$

Teniendo en cuenta que x° es lo que avanza el horario en "M" minutos, entonces:

$$\alpha = 30H - 11\left(\frac{M}{2}\right)$$

Caso II:

Cuando el minuterio adelanta al horario



Para las "H" horas y "M" minutos, de la figura se observa que:

$$30H + x + \alpha = 12x$$

$$\alpha = 11x - 30H$$

$$\alpha = 11\left(\frac{M}{2}\right) - 30H$$

El signo negativo acompañará a la manecilla que se encuentra rezagada; y el positivo, la que se encuentra adelantada (tomando en cuenta siempre el movimiento de las manecillas del reloj).

Notas:

- Dado un tiempo determinado, la hora referencial será la hora exacta anterior a la hora que nos dan.
- Cuando se pregunta por el ángulo que forman las manecillas del reloj, se entiende que es por el menor ángulo.

RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

Ejemplo 7:

¿Qué ángulo forman las agujas de un reloj en cada caso?

- a) 4 h 40 min
- b) 8 h 25 min
- c) 12 h 36 min

Resolución

Para estos casos, aplicamos la expresión general:

$$\alpha = \pm 30H \mp \frac{11}{2}M$$

Sin necesidad de emplear los signos, ya que el ángulo debe ser positivo.

a) $\alpha = 30(4) - \frac{11}{2}(40)$

$$\alpha = -120 + 220$$

$\alpha = 100^\circ$

b) $\alpha = 30(8) - \frac{11}{2}(25)$

$$\alpha = 240 - \frac{275}{2}$$

$$\alpha = \frac{480 - 275}{2} = \frac{205}{2}$$

$\alpha = 102^\circ 30'$

- c) Cuando es las 12 h en la expresión, "H" se reemplaza por 0 (cero).

$$\alpha = 30(0) - \frac{11}{2}(36)$$

$$\alpha = 0 - 198^\circ$$

Como debe considerarse el menor ángulo.

$$\Rightarrow \alpha' = 360 - 198$$

$\alpha' = 162^\circ$

Ejemplo 8:

Indicar cuántos minutos después de la 1 forman ángulo recto las manecillas de un reloj.

Resolución

Empleando la expresión:

$$\alpha = \pm H \mp \frac{11}{2}M$$

y reemplazando los datos tendremos 2 situaciones: (en ambos casos el Minutero adelanta al Horario; es decir, el "H" esta rezagado, por lo que a esta manecilla le asignaremos signo negativo).

I) Cuando el menor ángulo es 90°

$$90 = -30(1) + \frac{11}{2}M$$

$$90 = -30 + \frac{11}{2}M$$

$$\Rightarrow M = \frac{240}{11} = 21\frac{9}{11} \text{ min}$$

II) Cuando el ángulo sea 270° (mayor ángulo)

$$270 = -30(1) + \frac{11}{2}M$$

$$300 = \frac{11}{2}M$$

$$\Rightarrow M = \frac{600}{11} = 54\frac{6}{11} \text{ min}$$

Habrán dos situaciones entre la 1 y las 2 en las que las agujas del reloj formarán ángulo recto.

Por primera vez a la 1 con $21\frac{9}{11}$

y

Por segunda vez a la 1 con $54\frac{6}{11}$

Ejemplo 9:

A que hora entre las 8 y las 9 el menor ángulo formado por las manecillas del reloj es la quinta parte del mayor ángulo?

Resolución

Los dos ángulos (menor y mayor) suman 360°

$$\text{Mayor} + \text{Menor} = 360^\circ$$

$$5x + x = 360^\circ$$

$$x = 60^\circ$$

Este ángulo lo formaron cuando eran las 8h "M" min.

Para calcular «M» aplicamos:

$$\alpha = 30H \pm \frac{11}{2}M$$

$$60 = 30(8) \pm \frac{11}{2}M$$

Considerando signos, puede darse dos situaciones:

$$I) \quad 60 = -240 + \frac{11}{2}M$$

$$II) \quad 60 = 240 - \frac{11}{2}M$$

$$300 = \frac{11}{2}M$$

$$\frac{11}{2}M = 180$$

$$M = \frac{600}{11} = 54\frac{6}{11}$$

$$M = \frac{360}{11} = 32\frac{8}{11}$$

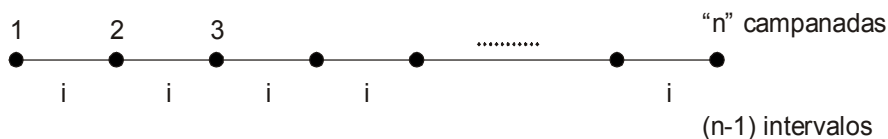
RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

La hora en que formarán 60° las manecillas será por primera vez a las 8h $8\text{h } 32\frac{8}{11}\text{min}$ y por segunda vez a las $8\text{h } 54\frac{6}{11}\text{min}$.

4. Problemas sobre Campanadas

El tiempo que se mide al tocar una cantidad «n» de campanadas siempre es a partir de una que «marca al poro»; es decir, que la medimos por intervalos.

Gráficamente:



i = tiempo que demora cada intervalo

Ejemplo 10:

Un reloj señala la hora con igual número de campanas. para indicar las 6 a.m. demoró 15 seg. ¿Cuánto demorará para indicar las 9 a.m.?

Resolución

La solución a este tipo de problemas se hace aplicando «regla de tres simple», tomando en cuenta los intervalos y generados entre campanada y campanada.

Es decir:

6 am <> 6 camp 5 int _____ 15 seg

9 am <> 9 camp 8 int _____ x

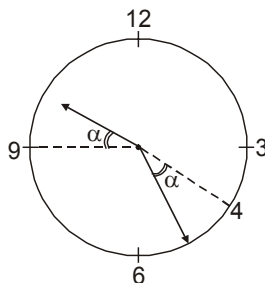
$$x = \frac{8 \cdot 15}{5} = 24 \text{ seg}$$

⇒ Se demorará 24 segundos

PROBLEMAS PROPUESTOS

- ¿A qué hora de la mañana el tiempo que marca un reloj es igual a $\frac{5}{4}$ de lo que falta para los doce del medio día?
a) 10:20 b) 6:40 c) 8:15
d) 9:00 e) 11:45
- Si fueran 3 horas más tarde de lo que es, faltaría para acabar el día $\frac{5}{7}$ de lo que faltaría, si es que fuera 3 horas más temprano. ¿Qué hora es?
a) 05:30 p.m. b) 06:30 p.m.
c) 05:00 a.m. d) 06:00 a.m.
e) 06:00 p.m.
- ¿Qué día del año marcará la hoja de un almanaque cuando el número de hojas arrancadas excede en 2 a los $\frac{3}{8}$ del número de hojas que quedan?
a) 10 Abril b) 11 Abril c) 12 Abril
d) 13 Abril e) 14 Abril
- Un reloj se adelanta dos minutos cada 3 horas. ¿Qué hora será en realidad cuando marque las 10:15 a.m. si hace 30 horas que viene adelantándose?
a) 10:00 b) 9:59 c) 9:45
d) 9:55 e) 9:50
- Un reloj se atrasa 1 minuto por cada hora. Si marcó la hora exacta por última vez al medio día de un 6 de marzo, ¿en qué fecha próxima marcará la hora exacta nuevamente?
a) 5 abril b) 4 abril c) 6 abril
d) 7 abril e) 3 abril
- Un reloj se adelanta a razón de 4 minutos por hora, se pone a la hora (correcta) a las 2 de la tarde. En la mañana del día siguiente, se observa que dicho reloj está marcando las 10 en punto. ¿Cuál es la hora correcta en ese momento?
a) 8:45 a.m. b) 8:30 a.m.
c) 5:30 a.m. d) 10:45 a.m.
e) 8:15 a.m.

- ¿Qué ángulo forman las agujas del reloj, en cada caso?
a) 03:16'20" b) 11:59 c) 08:17
d) 02:36 e) 06:30
- Fernandito salió de su casa entre las 12 y 1 de la tarde, cuando las agujas del reloj formaban un ángulo recto (por primera vez); y llegó a su casa entre las 2 y las 3 de la tarde del mismo día, cuando las agujas del reloj se encontraban en una misma dirección, pero con sentidos opuestos. Determinar cuánto tiempo estuvo fuera de su casa Fernandito.
a) 2h 26'16" b) 2h 28'18"
c) 2h 27'17" d) 2h 27'19"
e) 2h 27'16"
- ¿Qué hora marca el reloj mostrado en la figura?



Rpta: _____

- Un campanario señala las horas con igual número de campanadas. Si para indicar las 05:00 a.m. demora 6 segundos, ¿cuánto demorará para indicar las 12:00?
a) 15 seg b) 13 seg c) 14,5 seg
d) 16,5 seg e) 17,5 seg
- Un reloj demora 12 segundos en dar 7 campanadas. ¿Cuántas campanadas dará en 36 segundos?
a) 16 camp. b) 17 camp.
c) 18 camp. d) 19 camp.
e) 20 camp.

RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

12. Un reloj demora $(m+1)$ segundos en tocar m^2 campanadas. ¿Cuántas campanadas tocará en 1 segundo?
a) $m-1$ b) m^2-1 c) m
d) m^2+1 e) $m+2$
13. El campanario de un reloj tarda 2 segundos en dar 2 campanadas. ¿Cuántos segundos tardará en dar 3 campanadas?
a) 3 seg b) 4 seg c) 2,5 seg
d) 4,5 seg e) 6 seg
14. ¿Cuál es la relación de la fracción transcurrida de la semana a la fracción transcurrida del día cuando es las 6 a.m. del miércoles?
a) $8/7$ b) $1/7$ c) $6/7$
d) $9/7$ e) $13/7$
15. Un reloj se adelanta 2 minutos cada 3 horas. ¿A qué hora empezó a adelantarse si a las 11:15 p.m. señala 11:27?
a) 5:30 a.m. b) 5:45 c) 5:35
d) 6:13 e) 5:15
5. Se le preguntó la hora a un profesor y él responde: «Queda del día, en horas, la suma de las dos cifras que forman el número de las horas transcurridas. ¿Qué hora es?
a) 21 h b) 20 h c) 19 h
d) 23 h e) 18 h
6. Un reloj que dá las horas mediante campanadas se demora 1 segundo para dar las 2 horas. ¿Cuántos segundos se demorará en dar las 4 horas si las campanadas están igualmente espaciadas?
a) 3 seg b) 4 seg c) 5 seg
d) 2 seg e) 6 seg
7. Un reloj se atrasa 10 minutos cada día. ¿Cuántos días transcurrirán para alcanzar un punto donde el reloj indicará la hora correcta?
a) 36 b) 72 c) 120
d) 142 e) 144
8. Un reloj que se adelanta 2 minutos cada hora se sincroniza a media noche con un reloj que pierde 1 minuto cada hora. ¿Cuántos grados formarán los minutos de ambos relojes al medio día?
a) 84° b) 72° c) 0°
d) 180° e) 144°

TAREA DOMICILIARIA

1. Faltan 5 para las 12. ¿Qué ángulo estarán formando las agujas del reloj?
a) 27° b) $28^\circ30'$ c) $26^\circ30'$
d) $27^\circ15'$ e) $27^\circ30'$
2. Son más de las 3, pero aún no son las 4. Si los minutos transcurridos desde las 3 es el triple de los minutos que faltan transcurrir para que sea las 4, ¿qué hora es?
a) 3:00 b) 3:45 c) 4:00
d) 4:50 e) 3:42
3. ¿Cuántas veces por día aparecen superpuestas la agujas de un reloj?
a) 12 b) 24 c) 19
d) 22 e) 23
4. Una metralleta dispara 10 balas en el transcurso de un segundo. ¿Cuántas balas dispara en un minuto?
a) 600 b) 601 c) 599
d) 540 e) 541
9. Indicar cuántos minutos después de la 1 p.m. forman ángulo recto las manecillas de un reloj.
a) 260/11 min b) 250/11
c) 270/11 d) 300/11
e) 240/11
10. ¿Cuál es el ángulo formado por las manecillas de un reloj a las 05:10 a.m.?
a) 80° b) 85° c) 95°
d) 90° e) $94,5^\circ$
11. Un campanario tarda 4 seg en tocar 5 campanadas. ¿Cuánto tardará en tocar 10 campanadas?
a) 8 seg b) 9 seg c) 75 seg
d) 10 seg e) 12 seg

- | | |
|--|--|
| <p>12. Una campana toca 3 campanadas en 7 segundos. ¿Cuántos segundos tardará en tocar 7 campanadas?</p> <p>a) 20 seg b) 21 seg c) 22 seg
d) 24 seg e) 23 seg</p> <p>13. Un campanario señala las horas con igual número de campanadas. Si para indicar las 5:00 a.m. demora 8 segundos, ¿cuánto demorará para indicar las 12:00?</p> <p>a) 22 b) 21 c) 20
d) 19 e) 18</p> | <p>14. Un reloj de alarma da 145 «bip» en 20 seg. ¿Cuánto se demorará para dar 37 «bip»?</p> <p>a) 5 seg b) 7 seg c) 8 seg
d) 14 seg e) 10 seg</p> <p>15. El campanario de una iglesia estuvo tocando durante 38 segundos. Si se escuchan tantas campanadas como 10 veces el tiempo que hay entre campanada y campanada, ¿cuánto tiempo empleará este campanario para tocar 7 campanadas?</p> <p>a) 10 seg b) 12 seg c) 13 seg
d) 14 seg e) 15 seg</p> |
|--|--|

CLAVES DE RESPUESTA

1	2	3	4	5
E	A	D	E	A
6	7	8	9	10
A	B	E	E	C
11	12	13	14	15
B	B	A	A	B

Operadores Matemáticos

I. Objetivos

- * Conocer el concepto de operadores matemáticos.
- * Conocer las propiedades de los operadores matemáticos.
- * Conocer la definición de la ley de composición interna y sentar las bases de un buen aprendizaje.

II. Operador Matemático

Es aquel símbolo que representa una operación matemática y emplear su respectiva regla de definición:

Ejemplo:

$$a * b = \underbrace{a^3 + b^2 + 2ab}_{\text{Regla de definición}}$$

↓

Operador
Matemático

Principales Operadores matemáticos y que lo representan:

Operación	Operador Matemático
Adición	+
Sustracción	-
Multiplicación	×
División	÷
Radicación	√
Valor absoluto	
Máximo entero	⌊ ⌋
Sumatoria	Σ

III. PROBLEMAS:

1. Si: $a \Delta b = a^3 + b^2$

Calcular: $E = (5 \Delta 3) + (2 \Delta 5)$

Resolución

$$a \Delta b = a^3 + b^2$$

$$5 \Delta 3 = 5^3 + 3^2 = 134$$

$$2 \Delta 5 = 2^3 + 5^2 = 33$$

Piden:

$$E = (5 \Delta 3) + (2 \Delta 5)$$

$$E = 134 + 33 = \boxed{167}$$

2. Si:

$$2x^y * 3y^x = (x+y)^2$$

Calcular: $18 * 24$

Resolución

$$2x^y * 3y^x = (x+y)^2$$

$$2(3)^2 * 3(2)^3 = (3+2)^2$$

$$18 * 24 = \boxed{25}$$

3. Dado:

$$10 * 20 = 225$$

$$12 * 10 = 121$$

$$8 * 12 = 100$$

Calcular: $A = 8 * 8$

Resolución

Analizando los operadores determinamos:

$$10 * 20 = \left[\frac{10+20}{2} \right]^2 = 225$$

$$12 * 10 = \left[\frac{10+12}{2} \right]^2 = 121$$

$$8 * 12 = \left[\frac{8+12}{2} \right]^2 = 100$$

Se deduce:

$$a * b = \left[\frac{a+b}{2} \right]^2$$

Piden:

$$8 * 8 = \left[\frac{8+8}{2} \right]^2 = \boxed{64}$$

4. Si:

$$\begin{array}{c} \triangle \\ \begin{array}{cc} a & \\ b & c \end{array} \end{array} = (a+b+c)^2$$

Calcular:

$$E = \begin{array}{c} \triangle \\ \begin{array}{cc} 5 & \\ 4 & 80 \end{array} \end{array}$$

Resolución

$$\begin{array}{c} \triangle \\ \begin{array}{cc} a & \\ b & c \end{array} \end{array} = (a+b+c)^2$$

$$\begin{array}{c} \triangle \\ \begin{array}{cc} 5 & \\ 4 & 80 \end{array} \end{array} = (5+4+80)^2 = 89^2 = \boxed{7921}$$

RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

5. Si:

$$\triangle n = (n-1)^2; \text{ hallar "x" en:}$$

$$\triangle x = 64; \text{ si } x \in \mathbb{Z}^+$$

Resolución

En la definición:

$$\triangle n = (n-1)^2$$

Tomando:

$$\triangle x = 64 = 8^2 = (\triangle 9 - 1)^2 = \triangle 9$$

Se deduce:

$$\triangle x = 9 = 3^2 = (\triangle 4 - 1)^2 = \triangle 4$$

Se deduce:

$$\triangle x = 4 = 2^2 = (\triangle 3 - 1)^2 = \triangle 3$$

$$\therefore x = 3$$

6. Si:

$$\boxed{a} = (a+2)^2$$

Calcular:

$$A = \boxed{\boxed{1}}$$

Resolución

$$\boxed{a} = (a+2)^2$$

$$\boxed{1} = (1+2)^2 = 9$$

$$\boxed{\boxed{1}} = (9+2)^2 = 121$$

$$\boxed{\boxed{\boxed{1}}} = \boxed{121} = (121+2)^2 = \boxed{15124}$$

7. Si:

$$a * b = \sqrt{a^b}; \quad b \Delta a = \sqrt[3]{a^b}$$

Hallar:

$$\sqrt[3]{4 * 27} - \sqrt{4 \Delta 27}$$

Resolución

$$a * b = \sqrt{a^b} \quad b \Delta a = \sqrt[3]{a^b}$$

$$4 * 27 = \sqrt{4^{27}} \quad 4 \Delta 27 = \sqrt[3]{4^{27}}$$

$$\sqrt[3]{4 * 27} = \sqrt[3]{\sqrt{2^{2 \times 9}}} \quad \sqrt{4 \Delta 27} = \sqrt[3]{3^{3 \times 4}}$$

$$\sqrt[3]{4 * 27} = 2^3 = 8 \quad \sqrt{4 \Delta 27} = 3^2 = 9$$

Calcular:

$$\sqrt[3]{4 * 27} - \sqrt{4 \Delta 27} = 8 - 9 = -1$$

8. Se define:

$$a * b = a^2 - b^2$$

Resolver:

$$A = \left(\dots \left(\left((99 * 1)^{98 * 2} \right)^{97 * 3} \right) \dots \right)^{1 * 99}$$

Resolución

Por comodidad:

$$a * b = a^2 - b^2$$

$$50 * 50 = 50^2 - 50^2 = \text{cero}$$

$$A = \left[\dots \left((99 * 1) \dots \right)^{(50 * 50)} \dots \right]^{1 * 99}$$

$$A = \left[\dots \left[\dots (99 * 1) \dots \right]^0 \right]^{1 * 99} = (1^{\dots})^{1 * 99} = \boxed{1}$$

9. Si: $a * b = 2b^2 - 3a$

Calcular:

$$E = \sqrt{3 * \sqrt{3 * \sqrt{3 * \dots}}}$$

Resolución

$$(E)^2 = \left(\sqrt{3 * \sqrt{3 * \sqrt{3 * \dots}}} \right)^2$$

$$E = 3 * \underbrace{\sqrt{3 * \sqrt{3 * \sqrt{3 * \dots}}}}_E$$

$$E = 3 * E$$

$$E = 2E^2 - 3(3)$$

$$E = 2E^2 - 9$$

$$E^2 = 9$$

$$E = 3$$

10. Si: $x * y = x - y + 2(y * x)$

Hallar: $M = 12 * 3$

Resolución

$$x * y = x - y + 2(y * x)$$

$$x * y = x - y + 2[y - x + 2(x * y)]$$

$$x * y = x - y + 2y - 2x + 4(x * y)$$

$$3(x * y) = x - y$$

$$x * y = \frac{x - y}{3}$$

$$12 * 3 = \frac{12 - 3}{3} = \boxed{3}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS:

1. Si:

$$\boxed{x+5} = 3x + 5$$

Calcular:

$$E = \boxed{9} + \boxed{12}$$

a) 43

b) 34

c) 51

d) 24

e) 27

2. Si:

$$\triangle_{3x-4} = x^2 + 1$$

Calcular:

$$A = \triangle_{\frac{11}{b \cdot 36}} + \triangle_{\frac{5}{c \cdot 34}}$$

a) 8

b) 36

c) 34

d) 51

e) 27

3. Si se cumple:

$$m \& n = (m+n)^{m \cdot n}$$

Además: $7 \& 2 = 81$

$$2 \& 1 = 9$$

$$2 \& 3 = 25$$

Calcular:

$$E = 20^{20} * 7$$

a) 1

b) 2

c) 3

d) 5

e) 7

4. Si:

$$a * b = 3^a + b - 8$$

Calcular:

$$E = 2 * 6$$

a) 2

b) 3

c) 4

d) 5

e) 7

5. Conociéndose que:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Hallar: "x" en:

$$\begin{vmatrix} 3x & -1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 3 & x \end{vmatrix}$$

a) -4

b) 4

c) 2

d) 3

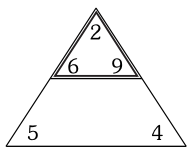
e) 5

RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

6. Si:

$$\triangle_{a,b,c} = a^2 + b + \sqrt{c}$$

Calcular:



- a) 176 b) 167 c) 180
d) 186 e) 196

7. Dado:

$$\boxed{x} = 2x + 1$$

Calcular: "a" en:

$$\boxed{\boxed{a-1}} = 15$$

- a) 2 b) 3 c) 1
d) 0 e) 4

8. Se define:

$$\odot x = \frac{x(x+1)}{2}$$

Calcular "n" en:

$$\odot(n-1) = 21$$

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

9. Se define:

$$\boxed{n} = 1 + 2 + 3 + \dots + n; \forall n \in \mathbb{N}$$

Hallar "x" en:

$$\boxed{\boxed{x}} = 231$$

- a) 2 b) 3 c) 5
d) 7 e) 9

10. Se define:

$$\odot x = (x+1)^2$$

Hallar "n" en:

$$\odot(n) = 100$$

- a) 3 b) 2 c) $\sqrt{2}$
d) $\sqrt{3} - 1$ e) $\sqrt{2} - 1$

11. Si:

Δ	1	2	3	4
1	4	9	16	25
2	9	16	25	36
3	16	25	36	49
4	25	36	49	64

Calcular: $10 \Delta 5$

- a) 225 b) 200 c) 125
d) 325 e) 425

12. Se define:

$$\left(\frac{1}{2}\right) = 0,125$$

$$\left(\frac{5}{3}\right) = 2,7$$

$$\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{16}{625}$$

Calcular:

$$E = \left(\frac{3}{2}\right) + \left(\frac{2}{5}\right) + \left(\frac{5}{3}\right)$$

- a) 45 b) 50 c) 42
d) 68 e) 53

13. Si:

$$\sqrt{a} * b^2 = 2(\sqrt{b} * a^2) - ab$$

Calcular: $2 * 5$

- a) $2\sqrt{5}$ b) $4\sqrt{5}$ c) $5\sqrt{3}$
d) $3\sqrt{3}$ e) $2\sqrt{3}$

14. Se define:

$$\sqrt{a(b*a)} = a*b; a*b > 0$$

Calcular:

$$E = 16 * 2$$

- a) 2 b) 4 c) 6
d) 8 e) 10

15. Si:

$$\triangle a = a(a+1)$$

Calcular: E

$$E = \triangle 1 + \triangle 2 + \triangle 3 + \dots + \triangle 20$$

- a) 3060 b) 3080 c) 3040
d) 3050 e) 3090

TAREA DOMICILIARIA

1. Sabiendo que:

$$a \# b = a^2 - ab$$

Calcular el valor de "m"; si:

$$(m+2) \# (m-1) = m$$

- a) -6 b) -3 c) 6
d) 3 e) 1

2. Si: $x * y = \frac{x+y}{x-y}$

Hallar: $\frac{-2 * 4}{8 * 2}$

- a) -1/3 b) 1/2 c) -1/5
d) 1/5 e) -1/2

3. Si: $m \% n = \frac{m+n}{m-n}$

Hallar: $\left(\frac{1}{2} \% \frac{1}{4}\right) \% 5$

- a) -4 b) 4 c) 2/5
d) -2/5 e) -3/2

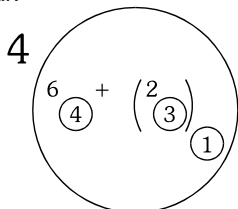
4. Si:

$$M_{(R)} = 2M+1 \dots\dots$$

Si: $M \geq 5$

$$E_{(P)} = E+P ; \text{ en otros casos.}$$

Calcular:



- a) 5 b) 28 c) 36
d) 24 e) 6

5. Si:

$$N^* = N^2 + N$$

$$N^\# = N^2 + N + 1$$

$$N^* = \frac{42}{N^\#}$$

Además:

Calcular uno de los valores de N:

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

6. Si se sabe que:

$$\sqrt[3]{x} * \sqrt{y} = y^2 + x^3$$

Calcular: $2 * 2$

- a) 536 b) 528 c) 8
d) 105 e) 43

7. Dada la operación conmutativa " Δ " definida en:

$$A = \{0, 1, 2, 3\}$$

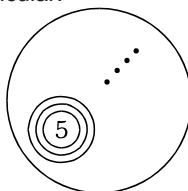
Δ	0	1	2	3
0	0	a	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	e	4

Calcular: $3^{-1} + 1^{-1} + 2^{-1}$

Obs: a^{-1} es el inverso "a"

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 5 e) 6

8. Sabiendo que: $\boxed{x} = x(x+2)$
Calcular:



1996 veces

Si además: $\boxed{5} = 35$

- a) 5 b) 15 c) 10
d) 555 e) 5^{1996}

9. Si:

$$\boxed{a} \boxed{b} = \frac{a+b+15}{2}$$

$$\boxed{3} \boxed{x} = 14$$

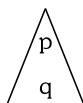
Hallar el valor de:

$$\boxed{x^2} \boxed{5}$$

- a) 125 b) 120 c) 205
d) 81 e) 60

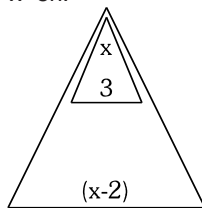
RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

10. Si:



$$= 3p + 2q - 4$$

Hallar "x" en:



$$= 64$$

- a) -6
d) -8

- b) 6
e) 10

- c) 8

11. Si:

$$7 \# 3 = 43$$

$$6 \# 2 = 32$$

$$5 \# 1 = 23$$

Entonces calcular: $(8 \# 4) - (8 \# 2)$

- a) 4
d) -2

- b) 6
e) -4

- c) -6

12. Si:

$$x^y \Delta y^x = \sqrt[3]{x+y}$$

Calcular: $125 \Delta 243$

- a) 2
d) 5

- b) 3
e) 6

- c) 4

13. Si: $x^2 \bigcirc y^3 = x^3 - y^2$

Calcular:

$$P = 16 \bigcirc 125$$

- a) 19
d) 20

- b) 29
e) 27

- c) 39

14. Si:

$$x^0 = \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$$

Entonces calcular 9^0

- a) 1/12
d) 1/27

- b) 1/6
e) 1/81

- c) 1/3

15. Si: $\boxed{N} = 2N + 6$

y también: $\boxed{\boxed{x^2 - 6}} = 66$

Calcular: $\boxed{2x}$

- a) 26
d) 22

- b) 38
e) 18

- c) 44

CLAVES DE RESPUESTA

1	2	3	4	5
B	C	A	B	B
6	7	8	9	10
B	E	A	E	B
11	12	13	14	15
E	A	C	B	E

Sucesiones

Noción de Sucesión

Una sucesión es un conjunto ordenado de elementos, de modo tal que se puede distinguir el primero, el segundo, el tercero, y así sucesivamente, acorde con una ley de formación, criterio de orden o fórmula de recurrencia.

A los elementos de este conjunto se les denomina términos de la sucesión.

Observación:

Se entiende que cada término de la sucesión está en "función" a su número ordinal.

Ejm:

1º	2º	3º	4º	nº ← N° ordinal
1	3	5	7	?? ← Términos de
2(1) - 1	2(2) - 1	2(3) - 1	2(4) - 1	2(n) - 1 la sucesión

PROBLEMAS PROPUESTOS

- Hallar el término que continúa en cada caso:
 - P; U, S, D, T, T, C,?
 - 1/2, 3/2, 3/5, 7/4,?
 - 8, 8, 16, 24, 40,?
 - P; 6/11; 72 b) D; 8/12; 84
 - E; 9/20; 96 d) Q; 7/15; 62
 - C; 5/11; 64
- En un pentágono irregular sus ángulos interiores están en P.A. creciente. Hallar el menor ángulo agudo si se sabe que éste es la séptima parte del mayor.
 - 20° b) 27° c) 24°
 - 15° e) 18°
- En una P.A. se sabe que el tercer término es 8 y el décimo quinto es 44. Hallar la razón de la progresión y el décimo término.
 - 4; 32 b) 5; 28 c) 3; 27
 - 3; 29 e) 5; 30
- Dada la siguiente sucesión:
1, 13, 25, 37,
 - ¿Cuántos términos son de 3 cifras?
 - ¿Cuántos términos de 3 cifras terminan en cifra 3?
 - 65; 25 b) 75; 20 c) 85; 15
 - 75; 15 e) 55; 35
- En una P.G. decreciente se sabe que el cuarto término es 1/8 del primero. Además, los dos primeros términos suman 12. Calcular la suma de los 10 primeros términos de dicha progresión.
 - 1021/63 b) 1088/57 c) 1023/63
 - 1024/64 e) 1023/64

RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

6. El 4to. término de una sucesión polinomial de 2do. orden es 4 veces el 1er. término, y la razón constante es igual al número ordinal del 3er. término aumentado en 1. Además, se sabe que el 2do. término de la sucesión es los $\frac{3}{2}$ de la razón. Hallar la suma de cifras del duodécimo término.

a) 7 b) 8 c) 9
d) 10 e) 11

7. He repartido tantos caramelos como el valor del último término de una sucesión aritmética, en donde a cada niño le ha tocado 2 veces más el valor de la razón. Hallar el número de caramelos que sobran si el número de términos de la sucesión es igual al valor del 10mo. término de los "n" primeros números primos. Además, el 3er. término de la sucesión es el cubo del primero y éste es igual al valor absoluto del coeficiente del 2do. término del desarrollo de un binomio al cuadrado.

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

8. En el siguiente triángulo numérico:

				6	→	F1
		6		12	→	F2
	6	18		18	→	F3
	6	24	36	24	→	F4
6	30	60	60	30	→	F5
			:			

Hallar la suma de dos términos centrales de la fila diez.

a) 2662 b) 2773 c) 2772
d) 218 e) 1768

9. ¿Cuál es el último término de la siguiente sucesión:

3, 10, 17, 24,

si para escribirla se han utilizado 180 cifras?

a) 328 b) 729 c) 451
d) 452 e) 450

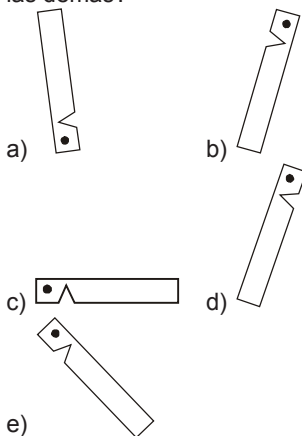
10. Se escribe la sucesión de los números naturales y nos detenemos cuando marcamos 412 veces la cifra 8. ¿Cuál es el último número de la sucesión?

a) 1385 b) 1538 c) 1512
d) 1472 e) 1583

11. Una pareja de conejos da cría cada mes, dando origen a otra pareja; cada una de las nuevas parejas pueden dar cría a partir del segundo mes de vida. Sin considerar la posibilidad de que alguno muera, se pregunta: ¿cuántas parejas de conejos habrá al cabo de 8 meses.

a) 85 b) 64 c) 256
d) 110 e) 55

12. ¿Qué figura no guarda relación con las demás?



13. ¿Qué letra continua en cada caso?

* A, E, H, J,

* J, L, H, J, F, H,

* U, T, C, S,

* E, U, F, D, M, T,

a) L; K; P; A b) M; L; K; R

c) N; Ñ; P; T d) K; D; N; R

e) K; D; N; A

14. Hallar el " t_n " en cada caso y dar como respuesta la suma de los resultados.

* 5, 7, 9, 11,

* 2, 5, 10, 17,

* $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{20}$,

- a) $(n^3 + 3n^2 + 6n + 4)(n + 1)$
 b) $(n^3 + n^2 + n)(n - 1)$
 c) $n^2 + 2n$
 d) $(n^3 + 2n)/n$
 e) $(n^4 + 3n^3 + 6n^2 + n + 1)/(n^2 + n)$

15. ¿Qué término continúa en cada caso?
 Dar como respuesta la suma de los resultados.

- * 2, 6, 10, 12, 18, 18,.....
 * 3, 8, 15, 24,.....
 * 1, 2, 4, 10, 34,.....
 * 3, 7, 15, 31,.....
 a) 192 b) 456 c) 220
 d) 173 e) 278

TAREA DOMICILIARIA

Enunciado: En cada uno de los siguientes casos diga que número sigue:

1. 114; 57; 54; 27; 24; 12;
 a) 7 b) 8 c) 9
 d) 12 e) 20
2. 8; 10; 20; 18; 9; 11;
 a) 20 b) 22 c) 28
 d) 30 e) 32
3. 6; 8; 10; 11; 14; 14;
 a) 17; 18 b) 18; 17 c) 16; 17
 d) 16; 18 e) 15; 15
4. 1; 3; 11; 43; 171;
 a) 720 b) 683 c) 90
 d) 120 e) 820
5. 2; 4; 1; 4; 9; 3;
 a) 20 b) 21 c) 30
 d) 32 e) 16
6. 0; 7; 26; 63;
 a) 120 b) 25 c) 125
 d) 124 e) 64
7. 0; 1; 1; 2; 4; 7; 13;
 a) 21 b) 22 c) 24
 d) 28 e) 31

8. 1; 1; 2; 3; 5; 8;
 a) 13 b) 21 c) 34
 d) 37 e) 45
9. 4; 2; 2; 4; 16;
 a) 16 b) 256 c) 24
 d) 128 e) 32

Enunciado: En cada uno de los siguientes casos diga Ud. que letra continúa:

10. A; D; H; M;
 a) P b) Q c) R
 d) S e) T
11. C; A; D; B; E; C;
 a) F; E b) E; F c) D; F
 d) F; D e) G; H
12. I; V; E; R; P; E;
 a) A b) B c) C
 d) D e) L
13. U; D; T; C; C;
 a) R b) S c) T
 d) W e) Y
14. E; L; F; M; M; M;
 a) A; J b) J; A c) L; X
 d) F; P e) P; Q
15. O; D; T; C;
 a) P b) Q c) R
 d) S e) T

CLAVES DE RESPUESTA

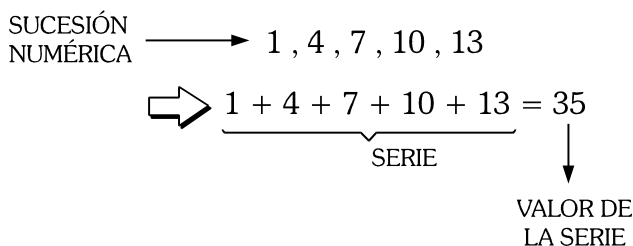
1	2	3	4	5
C	B	B	B	B
6	7	8	9	10
D	C	A	D	C
11	12	13	14	15
D	C	B	A	B

SERIES

Noción de Serie

Una serie numérica es la suma indicada de los términos de una sucesión numérica y su resultado representa el valor de la serie.

Ejemplo:



SERIE LINEAL O ARITMÉTICA

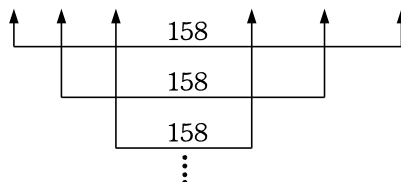
Ejemplo:

Hallar el valor de la siguiente serie:

$$S = \underbrace{4 + 7 + 10 + 13 + \dots + 154}_{50 \text{ TÉRMINOS}}$$

Resolución

$$S = 4 + 7 + 10 + \dots + 148 + 151 + 154$$



$$S = \underbrace{158 + 158 + 158 + \dots + 158}_{25 \text{ VECES}} = 158(25)$$

En general:

En toda serie aritmética:

$$\Rightarrow t_2 = t_1 + r$$

$$t_3 = t_1 + 2r$$

$$t_4 = t_1 + 3r$$

•
•
•

Además:

Donde:

r : razón aritmética

t_1 : primer término

t_n : último término o enésimo término

n : número de términos

Ejemplo:

Hallar el valor de la siguiente serie:

Resolución

79

SERIE GEOMÉTRICA

Sea:

Los términos de una progresión geométrica de razón constante "q".

$$\Rightarrow S = \underbrace{t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_n}_{\text{SERIE GEOMÉTRICA}}$$

$\begin{array}{ccccccc} & \times q & & \times q & & \times q & \\ & \diagup & \diagdown & \diagup & \diagdown & \diagup & \diagdown \\ & t_1 & t_2 & t_3 & & & \end{array}$

Donde el valor de la serie la obtenemos a partir de:

$$S = 1^{\text{er término}} \times \left[\frac{(\text{razón})^{\text{Nº términos}} - 1}{\text{razón} - 1} \right]$$

Serie geométrica decreciente de infinitos términos ($0 < q < 1$)

$$S_{\text{LÍMITE}} = \frac{1^{\text{ER. TÉRMINO}}}{1 - \text{RAZÓN}}$$

Ejemplo:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

Resolución

Se observa: 1er. término : 1 Razón: $\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow S_{\text{LÍMITE}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = \boxed{2}$$

Series y Sumas Notables

a. $\underbrace{1+2+3+4+\dots+n}_{\text{"n" términos}} = \frac{n(n+1)}{2}$

b. $\underbrace{2+4+6+8+10+\dots+2n}_{\text{"n" términos}} = \frac{n(n+1)}{1}$

c. $\underbrace{1+3+5+7+\dots+(2n-1)}_{\text{"n" términos}} = n^2$

d. $\underbrace{1^2+2^2+3^2+4^2+\dots+n^2}_{\text{"n" sumandos}} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

e. $\underbrace{1^3+2^3+3^3+4^3+\dots+n^3}_{\text{"n" sumandos}} = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$

f. $a^1+a^2+a^3+\dots+a^n = \frac{a^{n+1}-a}{a-1}$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Sabiendo que la suma de veinte números impares consecutivos es 400. Hallar la suma de los 20 posteriores a los 20 siguientes números impares consecutivos, si todos son positivos.
a) 1800 b) 2000 c) 800
d) 2400 e) 3200

2. Hallar la suma de:
 $S = 7 + 77 + 777 + \dots + \underbrace{777 \dots 777}_{20 \text{ cifras}}$

- a) $\frac{7}{10}(10^{21}-200)$
b) $\frac{7}{81}(10^{21}-190)$
c) $\frac{7}{9}(10^{20}-190)$
d) $\frac{7}{99}(10^{21}-90)$
e) $\frac{7}{10}(10^{20}-20)$

3. Los números $x, x+4, x+16, \dots$ son los tres primeros términos de una P.G. Hallar la suma de los 10 primeros.

- a) 3^9+1 b) $3^{10}-1$ c) 3^9-3
d) 3^{10} e) $\frac{3^9-1}{2}$

4. Hallar la suma de:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 14^2 + 15^2$$

$$2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + 14^2 + 15^2$$

$$3^2 + 4^2 + \dots + 14^2 + 15^2$$

$$4^2 + \dots + 14^2 + 15^2$$

$$\vdots$$

$$14^2 + 15^2$$

$$15^2$$

- a) 7200 b) 3600 c) 14400
d) 2250 e) 9000

RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

5. Calcule el valor de "S"

$$S = \frac{\overbrace{1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 5 + \dots}^{2n-1 \text{ términos}}}{\underbrace{1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots}_{n \text{ términos}}}$$

- a) $\frac{n(n+1)}{2}$ b) 1 c) 2
d) $\frac{2n-1}{n}$ e) n
6. Calcular la suma en:

$$S = \underbrace{4 - 6 + 8 - 10 + 12 - 14 + \dots}_{100 \text{ sumandos}}$$
 a) 100 b) 0 c) 2
d) -100 e) -50
7. Calcular:

$$S = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + \dots + 19^2 - 20^2$$
 a) 200 b) 120 c) -210
d) 140 e) 320
8. LINA lee El conflicto de los siglos de la siguiente manera: El 1er. día, 3; páginas, el 2do. día, 6 páginas; el 3er. día, 9 páginas; el 4to. día, 12 páginas; y así sucesivamente. Mientras que EMERSON lee el 1er. día, 13; el 2do. día, 16; el 3er. día, 19; el 4to día, 22; y así sucesivamente. Si empiezan un 14 de febrero, ¿en qué fecha EMERSON habrá leído 100 páginas más que LINA?
 a) 22 de febrero
b) 23 de febrero
c) 28 de febrero
d) 24 de febrero
e) 25 de febrero
9. Hallar el resultado de la siguiente serie:

$$S = 2 + 12 + 36 + 80 + \dots + 1100$$
 a) 4000 b) 3410 c) 5200
d) 300 e) 3950

10. Hallar el resultado de la siguiente serie:

$$A = \frac{1}{6 \times 15} + \frac{1}{10 \times 21} + \frac{1}{14 \times 27} + \dots + \frac{1}{42 \times 69}$$

- a) $\frac{5}{210}$ b) $\frac{5}{207}$ c) $\frac{1}{2}$
d) $\frac{7}{200}$ e) $\frac{13}{90}$

11. Hallar el valor de la siguiente serie:

$$E = \frac{1}{6} + \frac{5}{36} + \frac{9}{216} + \dots$$

- a) 1 b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{1}{3}$
d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{9}{25}$

12. Si:

$$S_1 = 2$$

$$S_2 = 4 + 6$$

$$S_3 = 8 + 10 + 12$$

$$S_4 = 14 + 16 + 18 + 20$$

⋮

Hallar: S_{20}

- a) 8010 b) 8000 c) 8200
d) 8030 e) 8020

13. Efectuar:

$$S = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + 23 \cdot 24$$

- a) 4200 b) 4800 c) 4900
d) 4500 e) 4600

14. Determine el valor de "E" si:

$$E = 18 \cdot 1 + 17 \cdot 2 + 16 \cdot 3 + \dots + 1 \cdot 18$$

- a) 1150 b) 1160 c) 1120
d) 1140 e) 1130

15. Hallar la suma de los 30 términos de la sucesión:

$$7, 16, 29, 46, \dots$$

- a) 57 270 b) 57 720 c) 58 700
d) 20 365 e) 57 700

TAREA DOMICILIARIA

1. Hallar la suma de:

$$S = 1 \times 3 - 3 \times 5 + 5 \times 7 - 7 \times 9 + \dots$$

40 sumandos

- a) 3120 b) 2431 c) 3280
d) 5321 e) 4900
2. Se tiene una P.A. cuya razón es 5; se sabe que la suma de sus 10 primeros términos es "S". Hallar la suma de los 10 términos posteriores a los 10 siguientes, respecto a los 10 primeros.
a) S+100 b) S+1000 c) S+900
d) S+10000 e) S+100 000
3. Hallar el valor de:
 $E = 0,01 + 0,02 + 0,03 + \dots + 2$
a) 2 b) 10 c) 2,01
d) 201 e) 2,001
4. Hallar el valor de "E"
 $E = \frac{1}{2 \times 5} + \frac{1}{5 \times 8} + \frac{1}{8 \times 11} + \dots + \frac{1}{23 \times 26}$
a) $\frac{2}{23}$ b) $\frac{1}{13}$ c) $\frac{3}{26}$
d) $\frac{2}{13}$ e) $\frac{1}{520}$
5. Hallar el valor de "S" en:
 $S = \frac{1}{2 \times 3} + \frac{5}{4 \times 9} + \frac{19}{8 \times 27} + \frac{65}{16 \times 81} + \dots$
a) 1 b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{1}{2}$
d) $\frac{10}{9}$ e) $\frac{2}{3}$
6. Hallar el valor de "S" sabiendo que es máximo:
 $S = 2 + 402 + 4 + 396 + 6 + 390 + \dots$
"2n" sumandos
a) 26 480 b) 20 604 c) 24 065
d) 24 682 e) 21 539

7. Hallar el valor de la siguiente serie:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + \dots + S_{40}$$

Donde:

$$S_n = 80 + 78 + 76 + 74 + 72 + \dots$$

"n" sumandos

- a) 44 000 b) 4400 c) 44 280
d) 88 024 e) 84 240
8. Se tiene una sucesión cuyo término enésimo está dado por:

$$t_n = 3n^3 - 2n^2 + 5n + 3$$

calcular la suma de sus 20 primeros términos.

- a) 75 880 b) 138 080 c) 128 890
d) 127 670 e) 125 480

9. Calcular:

$$S = \frac{1}{4 \times 9} + \frac{1}{9 \times 14} + \frac{1}{14 \times 19} + \dots + \frac{1}{64 \times 69}$$

- a) $\frac{13}{276}$ b) $\frac{13}{66}$ c) $\frac{31}{132}$
d) $\frac{17}{276}$ e) $\frac{37}{132}$

10. Hallar:

$$S = 3125 + 2500 + 2000 + 1600 + \dots$$

- a) 25 255 b) 15 000 c) 78 125
d) 8400 e) 15 625

11. Calcular "S"

$$S = \frac{2}{3} + \frac{3}{9} + \frac{4}{27} + \frac{5}{81} + \dots$$

- a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{3}{4}$
d) $\frac{4}{3}$ e) $\frac{5}{4}$

12. Hallar:

$$M = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \dots$$

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

13. Calcular:

$$E = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{20 \times 21}$$

- a) $\frac{10}{21}$ b) $\frac{20}{33}$ c) $\frac{19}{20}$
 d) $\frac{15}{16}$ e) $\frac{20}{21}$

14. Calcular la suma de cifras del resultado de la siguiente serie:

$$E = 99 + 110 + 121 + \dots + 693$$

- a) 16 b) 17 c) 18
 d) 19 e) 20

15. Calcular "S" (dar como respuesta la suma de cifras)

$$S = 3 + 33 + 333 + \dots + \underbrace{33 \dots 33}_{10 \text{ cifras}}$$

- a) 25 b) 30 c) 35
 d) 32 e) 28

CLAVES DE RESPUESTA

1	2	3	4	5
C	B	D	D	C
6	7	8	9	10
B	C	D	A	E
11	12	13	14	15
E	B	E	C	B

Fracciones

Objetivos

- * Esclarecer y profundizar el concepto de fracciones.
- * Resolver ejercicios y problemas de aplicación aplicando el concepto y las propiedades de las fracciones.

Definición

Una fracción, es una expresión de la forma $\frac{a}{b}$, tal que $a \in \mathbb{Z}$ y $b \in \mathbb{Z}^+$.

Además: $\frac{a}{b}$ origina decimal

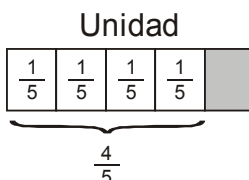
Donde:

"a": Es el numerador y representa las partes que se toma de la unidad.

"b": Es el denominador e indica las partes en que se divide la unidad.

Ejemplo:

$f = \frac{4}{5}$; se grafica:



Clasificación de Fracciones

a) Fracción Propia

Sea: $f = \frac{a}{b}$; f es propia si $b > a$

Ejemplo: $\frac{3}{5}, \frac{7}{9}, \frac{2}{5}$

b) Fracción Impropia

Sea: $f = \frac{a}{b}$; f es impropia, si $a > b$.

Ejemplo: $\frac{4}{3}, \frac{7}{4}, \frac{11}{9}$

RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

Nota:

Toda fracción impropia se puede expresar:

Ejemplos:

$$\frac{7}{4} = 1\frac{3}{4} \quad ; \quad \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

c) Fracciones Reducibles

Es cuando el numerador y el denominador no son primos entre sí, es decir son simplificables.

Ejemplo: $\frac{8}{4}, \frac{6}{2}$

d) Fracciones Irreducibles

Es cuando el numerador y el denominador sí son primos entre sí, es decir no son simplificables.

Ejemplo: $\frac{3}{4}, \frac{13}{17}, \frac{7}{2}$

e) Fracción Decimal

Cuando el denominador es una potencia de 10.

Ejemplo: $\frac{6}{100}, \frac{37}{10}, \frac{33}{1000}$

f) Fracción Ordinaria

Es cuando el denominador no es una potencia de 10.

Ejemplo: $\frac{3}{5}, \frac{7}{9}$

g) Fracciones Equivalente

Si a los dos términos de una fracción se les multiplica o divide por una misma cantidad, la fracción no varía.

Ejemplo:

$\frac{3}{5} = \frac{21}{35}$ son equivalentes (se ha multiplicado al numerador y denominador por 7).

$\frac{30}{25} = \frac{6}{5}$ son equivalentes (se ha dividido al numerador y denominador por 5).

Variación del valor de una fracción

i. Si: $f = \frac{a}{b}$ es una fracción propia, entonces:

$$a) \frac{a+m}{b+m} > \frac{a}{b}$$

$$b) \frac{a-m}{b-m} < \frac{a}{b}$$

ii. Si: $f = \frac{a}{b}$ es una fracción impropia, entonces:

$$a) \frac{a+m}{b+m} < \frac{a}{b}$$

$$b) \frac{a-m}{b-m} > \frac{a}{b}$$

Signos de una fracción

En una fracción debe distinguirse 3 signos.

- El signo que antecede a la fracción.
- El signo del numerador.
- El signo del denominador.

$$f = (+) \frac{+a}{+b}$$

Cambio de signo de una fracción

Si de los tres signos de una fracción se cambia dos de ellos, la fracción no varía.

Ejemplo:
$$\frac{-3}{-x} = \frac{3}{x} = -\frac{-3}{x} = -\frac{3}{-x}$$

Ejercicio:

Calcular el valor de:

$$E = \left\{ \left[4 \frac{x-y}{y-x} + 5 \frac{a-b}{b-a} \right] \frac{x-a}{a-x} \right\} \frac{b-y}{y-b}$$

RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

Resolución:

Como:

$$\frac{x-y}{y-x} = -\frac{(x-y)}{(x-y)} = -1$$

Análogamente:

$$\frac{a-b}{b-a} = -1 ; \quad \frac{x-a}{a-x} = -1 ; \quad \frac{b-y}{y-b} = -1$$

Reemplazando tendremos:

$$E = \left\{ \left[4^{-1} + 5^{-1} \right]^{-1} \right\}^{-1} = \frac{9}{20}$$

Fracción de un número dado

(de, del, de los < > a multiplicar)

Calcular:

$$\frac{a}{b} \text{ de } N = \frac{a}{b} \cdot N$$

Ejemplos:

$$\text{Calcular los } \frac{2}{5} \text{ de los } \frac{25}{16} \text{ de } 160 = \frac{2}{5} \cdot \frac{25}{16} \cdot 160 = 100$$

$$\text{Calcular los } \frac{2}{5} \text{ de los } \frac{9}{5} \text{ de los } \frac{5}{4} \text{ de } 120 = \frac{2}{5} \cdot \frac{9}{5} \cdot \frac{5}{4} \cdot 120 = 180$$

Método de reducción a la unidad

Este método se aplica en aquellos problemas que relacionan: obra, trabajo, caños, grifos, piscinas, desagües, etc. donde no se conoce la magnitud del trabajo o tarea pero sí es conocido el tiempo total que se necesita para hacer dicha obra.

El procedimiento consiste en determinar el avance por unidad de tiempo, para lo cual basta tomar la inversa al tiempo total, así por ejemplo:

1. Si José hace una obra en 8 días, ¿qué parte de la obra hace en 1 día?

Rpta.: En un día hace $\frac{1}{8}$ de la obra.

2. Si un trabajo se hace en 6 horas, en 1 hora hace $\frac{1}{6}$ de la obra.

De manera similar, si deseamos calcular el tiempo total basta invertir el avance por unidad de tiempo, por ejemplo:

1. Si en 1 hora hace $\frac{1}{3}$ de una obra, todo lo hace en 3 horas.
2. Un caño en 1 hora llena $\frac{1}{7}$ de un tanque, todo lo llena en 7 horas.

Ejercicio 1:

Ricardo hace un trabajo en 5 días y Roberto en 3 días. ¿En qué tiempo lo hacen juntos?

Resolución:

Ricardo en 1 día hace $\frac{1}{5}$ de la obra.

Roberto en 1 día hace $\frac{1}{3}$ de la obra.

Luego juntos en 1 día hacen:

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{8}{15} \text{ de la obra.}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Se tiene una fracción equivalente a , cuya suma de términos es igual a 66. Calcular la diferencia de ambos términos.

Resolución:

$$\frac{52}{91} = \frac{4(13)}{7(13)} = \frac{4k}{7k} \Rightarrow \begin{aligned} 4k + 7k &= 66 \\ 11k &= 66 \Rightarrow k = 6 \end{aligned}$$

Números: $4(6) = 24$

$$7(6) = 42$$

$$42 - 24 = 18$$

2. Un vendedor de periódicos dejó $\frac{1}{5}$ de los periódicos que llevaba en una oficina, los $\frac{3}{8}$ del resto en una clínica. Si aún le quedan 20 periódicos por vender, ¿cuántos periódicos tenía para distribuir?

Resolución

Número de periódicos: x

$$\text{Oficina: } \frac{3}{8}, \text{ queda } \frac{4x}{5}$$

$$\text{Clínica: } \frac{3}{8} \left(\frac{4x}{5} \right) \text{ queda: } \frac{5}{8} \left(\frac{4x}{5} \right)$$

$$\text{Dato: } \frac{5}{8} \left(\frac{4x}{5} \right) = 90 \Rightarrow x = 40$$

periódicos: 40

3. Si a un tanque de agua le agrega $\frac{1}{3}$ de lo que tiene, obtendré 56 litros más que la mitad de lo que habrá. ¿Cuántos litros de agua hay en el tanque?

Resolución:

Número de litros del tanque: x

Número de litros que habrá: $x + \frac{x}{3} = \frac{4x}{3}$

Dato:

$$x + \frac{x}{3} = 56 + \frac{4x}{6} \Rightarrow \frac{4x}{6} = 56 \Rightarrow x = 84$$

Número de litros que hay en el tanque: 84 litros

4. Hallar el resultado de:

$$S = 0,\overline{037} + 0,\overline{074} + 0,\widehat{1} + \dots + 1,\overline{259}$$

Resolución:

$$0,\overline{037} = \frac{37}{999} = \frac{1}{27}$$

$$0,\overline{074} = \frac{74}{999} = \frac{2}{27}$$

$$0,\widehat{1} = \frac{1}{9} = \frac{3}{27}$$

$$1,\overline{259} = 1 + 0,\overline{259} = 1 + \frac{259}{999} = 1 + \frac{34}{27}$$

$$S = \frac{1}{27} + \frac{2}{27} + \frac{3}{27} + \dots + \frac{34}{27} = \frac{34(35)}{27 \cdot 2} = \frac{595}{27} = 22,\overline{037}$$

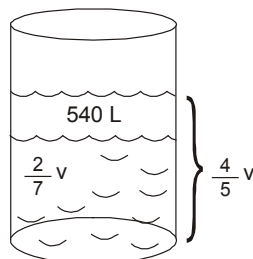
5. La piscina de Graciélita contiene agua hasta sus $\frac{2}{7}$ partes de su capacidad. Si le añadimos 540 litros de agua, el nivel de agua sube hasta los $\frac{4}{5}$ de su capacidad total. Si añadimos 540 litros a la piscina, ¿qué cantidad de agua faltará para llenarla?

Resolución

v = capacidad total

$$\frac{4}{5}v = 540 + \frac{2}{7}v \Rightarrow v = 1050 \ell$$

Falta para llenarlo: $v - \frac{4}{5}v = \frac{v}{5} = 210$ litros



6. Juan, David y Marlon realizarán una obra; Juan lo puede hacer en 10 días, David lo puede hacer en 12 días y Marlon lo puede hacer en 15 días. Si los tres trabajan juntos, ¿en cuántos días realizaron la obra?

Resolución:

$$\begin{array}{lcl} \text{Juan:} & 1 \text{ día} & \frac{T}{10} \\ \text{David:} & 1 \text{ día} & \frac{T}{12} \\ \text{Marlon:} & 1 \text{ día} & \frac{T}{15} \end{array}$$

T : Obra total

Los tres juntos en 1 día hacen:

$$\frac{T}{10} + \frac{T}{12} + \frac{T}{15}$$

$$1 \text{ día hacen } \frac{T}{4}$$

4 días hacen la obra T

7. En un cierto juego, Catalina pierde en un primer juego $\frac{1}{4}$ de su dinero, en el segundo juego pierde $\frac{1}{4}$ de lo que le quedó, y finalmente, en un tercer juego pierde $\frac{1}{5}$ del nuevo resto, quedándole 18 soles. ¿Cuánto perdió en el segundo juego?

Resolución

Dinero: x

	Pierde	Queda
1)	$\frac{x}{4}$	$\frac{3x}{4}$
2)	$\frac{1}{4} \left(\frac{3x}{4} \right)$	$\frac{3}{4} \left(\frac{3x}{4} \right)$
3)	$\frac{1}{5} \left(\frac{3}{4} \left(\frac{3x}{4} \right) \right)$	$\frac{4}{5} \left(\frac{3^2 x}{4^2} \right) = \frac{9x}{20}$

$$\text{Dato: } \frac{9x}{20} = 18 \Rightarrow x = 40$$

$$\text{En el segundo juego pierde: } \frac{3}{16} \cdot 40 = \frac{3}{4} \cdot 10 = \frac{30}{4} = 7,5$$

RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

8. Un estanque puede ser llenado por tres caños. El primer caño lo hace en 90 horas, el segundo lo llena en 72 horas y el tercero lo puede llenar en 120 horas. Estando vacío el estanque, se abren simultáneamente la llave de los 3 caños. ¿En qué tiempo llenarán $\frac{1}{3}$ de los $\frac{2}{5}$ del tanque?.

Resolución

Caños: A, B y C

- i) A: 1 hora llena $\frac{1}{90}$ ii) B: 1 hora llena $\frac{1}{72}$ iii) C: 1 hora llena $\frac{1}{120}$

Los tres caños juntos.

1 hora llena:

$$\frac{1}{90} + \frac{1}{72} + \frac{1}{120} = \frac{1}{9} \left[\frac{1}{10} + \frac{1}{8} + \frac{3}{40} \right] = \frac{1}{30}$$

Luego los tres caños abiertos llenan el estanque en 30 horas.

Luego: $\frac{1}{3} \div \frac{1}{30} = 10$ horas

9. Un recipiente contiene 30 litros, de los cuales 18 litros son de agua y 12 litros son de vino. Se retiran 10 litros de la mezcla y luego se reemplaza por agua. Seguidamente, se retira 15 litros de la nueva mezcla y se reemplaza por agua. ¿Qué parte es el vino respecto a la cantidad de agua en la mezcla resultante?

Resolución:

Se trabaja solo con lo que queda de vino, ya que el siempre disminuye.

	10L	15L
Saco	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
Queda	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$

$\cdot 12 = 4$ litros vino (quedó)

Piden: $\frac{4}{26} = \frac{2}{13}$

10. Mi hermana Kelith gasta cada semana $\frac{3}{7}$ de lo que gana; los $\frac{7}{9}$ de lo que resta lo destina a otras necesidades. Si en 8 semanas ahorró S/. 640, ¿cuánto gana a la semana?

Resolución:

Sueldo semanal: x

Gasto total (semana) $\frac{3}{7}x + \frac{7}{9} \left(\frac{4}{7}x \right) =$

Ahorro total (semana) $\frac{2}{9} \left(\frac{4}{7}x \right) = \frac{8}{63}x$

En 8 semanas (ahorra):

$$= 8 \left(\frac{8}{63} x \right) = 640 \Rightarrow x = s / .630$$

11. Si: $\frac{x}{5} + \frac{y}{11} = 1,0363636\ldots$; $x > 0, y > 0$

Hallar: $y - x$

Resolución:

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{11} = 1 + 0,036 = 1 + \frac{036 - 0}{990} = 1 + \frac{36}{990} = 1 + \frac{2}{55}$$

$$\frac{11x + 5y}{55} = \frac{57}{55} \Rightarrow 11x + 5y = 57$$

$$y - x = 7 - 2 = \boxed{5}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

- Calcular el valor de un número sabiendo que si a la cuarta parte de sus $\frac{2}{5}$ se le agrega los $\frac{2}{5}$ de sus $\frac{5}{8}$ y se resta los $\frac{3}{8}$ de su quinta parte, se obtiene 121.
a) 280 b) 440 c) 220
d) 880 e) 420
- Una piscina está llena hasta sus $\frac{5}{6}$ partes. Si se sacara 20000 litros, quedaría llena hasta sus $\frac{2}{3}$ partes. ¿Cuántos litros faltan para llenarla?
a) 20000 b) 30000 c) 40000
d) 36000 e) 120000
- Se vende $\frac{1}{3}$ de un lote de vasos. Si se quiebra 30 y quedan todavía $\frac{5}{8}$ del lote, ¿de cuántos vasos constaba el lote?
a) 620 b) 650 c) 670
d) 720 e) 750
- Un envase contiene 48 litros de agua. Si se retiran $\frac{3}{8}$ del contenido, luego los $\frac{2}{3}$ del resto y por último los $\frac{3}{5}$ del nuevo resto, ¿cuántos litros quedan?
a) 4 b) 6 c) 8
d) 10 e) 12
- Se vendieron $\frac{1}{5}$ de las entradas para una función de cine, el día de la función se vendió $\frac{1}{3}$ de las que quedaban, quedando por vender 48 entradas. ¿Cuál es la capacidad del cine?
a) 72 b) 84 c) 90
d) 108 e) 112
- Un alumno del Ceprevi hace $\frac{1}{3}$ de asignatura antes de ir a una fiesta, después de la fiesta hace $\frac{3}{4}$ del resto y se va a dormir. ¿Qué parte de la asignatura le queda por hacer?
a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{1}{12}$
d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{7}{12}$

RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

7. El sueldo de un profesor se incrementa en $\frac{1}{5}$ y luego disminuye en $\frac{1}{5}$ de su nuevo valor. ¿Qué sucedió con el sueldo de dicho profesor?
- a) No varía
b) Disminuyó $\frac{1}{5}$
c) Aumenta en $\frac{4}{5}$
d) Disminuye en $\frac{1}{25}$
e) Aumenta $\frac{1}{10}$
8. De un tonel de 1400L de vino se extrae $\frac{1}{4}$ de lo que no se extrae, luego $\frac{1}{4}$ de lo que ya se había extraído. ¿Cuánto se extrajo en total?
- a) 200 b) 250 c) 280
d) 350 e) 430
9. Una cañería llena una piscina en 12 horas y otra cañería la llena en 60 horas. ¿En qué tiempo puede llenarse la piscina, si las dos funcionan simultáneamente?
- a) 5h b) 10h c) 12h
d) 36h e) 72h
10. Tres hombres hacen un trabajo en 4 horas. Sabiendo que el primero lo haría en 9 horas y el segundo en 12 horas, ¿qué tiempo tardaría el tercero trabajando solo?
- a) 14h b) 15h c) 18h
d) 17h e) 16h
11. Un caño llena un pozo en 3 horas y otro lo vacía en 6 horas. ¿En qué tiempo se llenará el pozo, si se abre el desagüe una hora después de abrir el caño?
- a) 3h b) 3,5h c) 4h
d) 5h e) 6h
12. Dos albañiles pueden construir un muro en 20 días, pero trabajando por separado uno tardaría 9 días, más que el otro. ¿Qué tiempo tardará este otro?
- a) 36 días b) 40 días c) 45 días
d) 48 días e) 54 días
13. Dos grifos A y B llenan juntos un tanque en 30 horas. Si el grifo B fuese de desagüe se tardaría en llenar el tanque 60 horas. ¿En cuánto tiempo llenará la llave B el tanque estando éste vacío?
- a) 100h b) 110h c) 120h
d) 80h e) 90h
14. A y B hacen una obra en 6 días; B y C en 4 días y A y C harían la misma obra en 3 días. ¿En cuánto tiempo haría la obra A solo?
- a) 4 días b) 5 días c) 8 días
d) 15 días e) 12 días
15. A y B pueden hacer una obra en 20 días; B y C pueden hacer la misma obra en 15 días y A y C la pueden hacer en 12 días. ¿En cuánto tiempo harán la obra A; B y C juntos?
- a) 10 días b) 14 días c) 15 días
d) 18 días e) 20 días

TAREA DOMICILIARIA

1. Una pelota cae desde una altura de 54 m y en cada rebote se eleva una altura igual a los $\frac{2}{3}$ de la altura de la cual cayó. Hallar el espacio total recorrido por la pelotita hasta tocar por cuarta vez la superficie.
- a) 160m b) 206m c) 208m
d) 190m e) 186m
2. Cierta tela después de lavada se encoge $\frac{1}{5}$ de su longitud y $\frac{1}{6}$ de su ancho. ¿Cuántos metros deben comprarse para que después de lavada se disponga de 96 m^2 , sabiendo que el ancho original es de 80 cm?
- a) 160m b) 180m c) 200m
d) 210m e) 220m

3. Se tiene un recipiente de 8 litros, con 5 litros de alcohol y el resto con agua. Se utiliza una cuarta parte de la mezcla y se reemplaza con agua, luego se utiliza la tercera parte y se reemplaza con agua. ¿Cuántos litros de alcohol queda?
a) 1,5L b) 2L c) 2,5L
d) 3,5L e) 3L
4. Alejandro puede hacer una obra en 15 días y su enamorada puede hacer la misma obra en 10 días. Alejandro empieza a trabajar en la obra y después de 5 días se incorpora su enamorada. ¿A los cuántos días de incorporada está concluida la obra?
a) 2 días b) 5 días c) 3 días
d) 4 días e) 6 días
5. De un total de 40 personas, se sabe que 12 son varones y el resto mujeres. De las mujeres la cuarta parte son niña. Determinar qué parte de las mujeres son adultas.
a) $21/28$ b) $5/25$ c) $16/23$
d) $22/27$ e) $23/28$
6. En una granja hay "a" gallinas, "b" patos, "c" conejos y "d" pavos. ¿Qué parte de la granja no son mamíferos?
a) $\frac{a}{(a+b+c+d)}$
b) $\frac{(a+b+d)}{(a+b+c+d)}$
c) $\frac{(a+b+c)}{(b+c+d)}$
d) $\frac{(a+b+d)}{(a+b+d)}$
e) $\frac{(a+b+d)}{c}$
7. Un alumno resuelve los $3/5$ de lo que resuelve. ¿Qué parte del examen ha resuelto?
a) $4/7$ b) $5/8$ c) $4/9$
d) $3/8$ e) $3/7$
8. La mitad de lo que me queda de gaseosa en la botella. Dice ella "Es igual a la tercera parte de lo que ya me tomé". "Si tomo (dice luego) la cuarta parte de lo que me queda". ¿Qué fracción de toda la gaseosa se habrá tomado?
a) $3/10$ b) $3/7$ c) $2/3$
d) $7/10$ e) $1/3$
9. Si César es el triple de rápido que Arturo, ¿en qué tiempo harán una obra si trabajan juntos, sabiendo que Arturo hace toda la obra en 6 horas?
a) 1h 20m b) 1h 30m c) 1h 45m
d) 1h 10m e) 1h
10. Alfredo en "a" días pueden hacer los m/n de una obra, pero Carlos en "n" días puede hacer los m/a de la misma obra. Si trabajan juntos, ¿cuántos días demorarán para hacer toda la obra?
a) $2m/an$ b) $an/2m$ c) an/m
d) n/ma e) $am/2n$
11. 3 equipos de obreros podrían hacer el mismo trabajo, el 1° en 8 días, el 2° en 10 días y el 3° en 12 días. Se toma $1/2$ del 1°, el $1/3$ del 2° y los $3/4$ del 3°. ¿En cuántos días quedará terminada las $19/30$ partes del trabajo?
a) 5d b) 4d c) 6d
d) 8d e) 3,5d
12. Tres tuberías A, B y C funcionando juntas pueden llenar la mitad de un tanque en cuatro horas. Si funcionan solo A y B, pueden llenar todo el

RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

- estanque en 10 hrs; si funcionan “B” y “C” lo llenan en 15 h. ¿En cuántas horas llenará la tercera parte del estanque la tubería “B” si funciona sola?
- a) 12 h b) 8h c) 6h
d) 9h e) 4h
13. A y B pueden hacer una obra en $2\frac{2}{5}$ días, B y C en 4 días y A y C en 3 días. ¿En cuántos días puede hacer A solo la obra?
- a) 4 b) 6 c) 8
d) 9 e) 3
14. A puede hacer un trabajo en 10 días, B puede hacerlo en 5 días y C en 2 días. El primer día trabajó solo A, el segundo día se le une B y el tercer día trabajan los 3. ¿Cuántos días demora la obra?
- a) $2\frac{1}{4}$ b) $3\frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{4}$
d) 2 e) 3
15. A puede hacer un trabajo en 12 días y B hace el mismo trabajo en 60 días, después de trabajar juntos durante 2 días se retira A. ¿En qué tiempo terminará B la parte que falta?
- a) 25 días b) 14 días c) 36 días
d) 48 días e) 50 días

CLAVES DE RESPUESTA

1	2	3	4	5
---	---	---	---	---

6	7	8	9	10
---	---	---	---	----

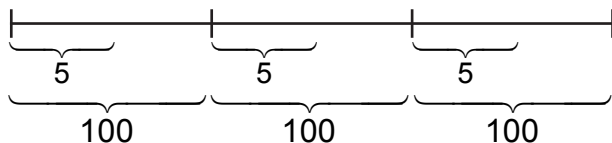
11	12	13	14	15
----	----	----	----	----

Tanto por Ciento

Concepto

El “m” por ciento de una cantidad “C” significa tomar “m” unidades de cada 100 contenidas en “C”.

Ejemplo: 5 por ciento de 300



Nota:

“de”	}	Implican una multiplicación
“del”		
“de los”		

Luego:

$$m\% \text{ de } C = \frac{m}{100} \cdot C$$

En nuestro caso:

$$5\% \text{ de } 300 = \frac{5}{100} \cdot 300$$

$$= 15$$

Aplicaciones

1. Dos descuentos sucesivos del a% y b% son equivalentes a un descuento único de:

$$D_u = \left[(a + b) - \frac{ab}{100} \right] \%$$

RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

2. Dos aumentos sucesivos del $a\%$ y $b\%$ son equivalentes a un aumento único de:

$$A_u = \left[(a + b) + \frac{ab}{100} \right] \%$$

Relación Financiera

Cuando se vende ganando:

$$\underbrace{P_f - \text{desc.}}_{P_v} = P_c + \underbrace{g}_{g_n + \text{gastos}}$$

P_f : Precio fijado o marcado

P_v : Precio de venta

P_c : Precio de costo o de compra

g : Ganancia bruta

g_n : Ganancia neta

Cuando se vende perdiendo

$$P_v = P_c - \text{Pérdida}$$

Nota:

Cuando no se especifica sobre quién se gana o se pierde, se debe sobreentender que es sobre el precio de costo.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Una cantidad disminuida en su 13% es 957. ¿Cuál es dicha cantidad?

a) 1100 b) 1000 c) 900
d) 800 e) 700

Resolución:

x : Cantidad

$$87\% \cdot x = 957$$

De donde: $x = 1100$

2. El 40% de los $\frac{3}{4}$ del 6% de 48 es 0,012 de los $\frac{2}{3}$ de una cantidad. Hallar el 25% de dicha cantidad.

a) 9 b) 25 c) 27
d) 108 e) 144

Resolución:

N : Cantidad

$$40\% \cdot \frac{3}{4} \cdot 6\% \cdot 48 = 0,012 \cdot \frac{2}{3} \cdot N$$

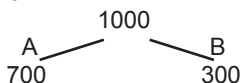
De donde: $N = 108$

$$\therefore 25\% \cdot 108 = 27$$

3. En una industria se han fabricado 1000 productos. El 70% de ellos han sido fabricados por la máquina "A" y el resto por la máquina "B". Si se sabe que el 6% de lo fabricado por "A" son defectuosos y que el 7% de los de "B" también lo son, ¿cuántos defectuosos hay en los 1000 productos?

a) 48 b) 63 c) 69
d) 72 e) 84

Resolución:



∴ N° de defectuosos:

$$6\% \cdot 700 + 7\% \cdot 300 = 63$$

4. Un trabajador observa que su salario ha sido descontado en un 20%. ¿Cuál debe ser el porcentaje de aumento del nuevo salario para que reciba su salario inicial?.

- a) 20% b) 23% c) 25%
d) 26% e) 27%

Resolución:

Salario inicial: 100%

$$80\% + x\% \cdot 80\% = 100\%$$

De donde: $x = 25$

5. En una reunión el 40% del total de personas son mayores de edad. Si se retiran la mitad de éstos, ¿qué tanto por ciento representan los menores de edad del nuevo total?.

- a) 65% b) 70% c) 72%
d) 75% e) 80%

Resolución:

M: 40% 20%
→ m: 60% 60%

100% 80%

$$\left. \begin{array}{l} 80\% \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad 100\% \\ 60\% \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad x \end{array} \right\} \text{R.3.S.D.}$$

$$x = 75$$

6. En una compañía trabajan 160 personas donde el 25% son mujeres. ¿Cuántas mujeres más deben contratarse para que el 40% del personal sea mujeres?.

- a) 40 b) 60 c) 25
d) 80 e) 45

Resolución:

Inicialmente:

$$M = 25\% \cdot 160 \\ = 40$$

Luego:

$$40 + x = 40\% (160 + x)$$

De donde: $x = 40$

7. Un boxeador decide retirarse cuando tenga un 90% de triunfos en su carrera. Si hasta el momento ha boxeado 100 veces, obteniendo 80 triunfos, ¿cuál es el mínimo número de peleas adicionales necesarias para que el boxeador se pueda retirar?.

- a) 80 b) 90 c) 120
d) 100 e) 150

Resolución:

x : Mínimo número de peleas adicionales

$$80 + x = 90\% (100 + x)$$

De donde: $x = 100$

8. Si gastara el 30% del dinero que tengo y ganara el 28% de lo que me quedaría, aún perdería S/. 1560. ¿Cuánto dinero tengo?.

- a) S/. 12000 b) S/. 9000
c) S/. 13500 d) S/. 14000
e) S/. 15000

Resolución:

Tengo: D

$$128\% \cdot 70\% D = 89,6\% D$$

$$10,4\% D = 1560$$

De donde: $D = 15000$

9. Si a un artículo cuyo precio es S/. 480 se le hace dos descuentos sucesivos del 20% y 10%, ¿cuál es su nuevo precio?.

- a) S/. 345,60 b) S/. 325,60
c) S/. 336 d) S/. 392,40
e) S/. 134,40

Resolución:

Nuevo precio:

$$72\% \cdot 480 = 345,6$$

RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

10. Una persona vendió un artículo en S/. 480 ganando el 20% del costo. ¿Cuál fue su precio de costo?
- a) S/. 320 b) S/. 360 c) S/. 400
d) S/. 420 e) S/. 450

Resolución:

$$P_v = P_c + G$$

$$480 = P_c + 20P_c$$

De donde: $P_c = 400$

11. El precio de un artículo es de S/. 25 en una fábrica. Un comerciante adquiere cinco de tales artículos por los que le hacen un descuento del 20%. Luego los vende obteniendo por todos ellos S/. 140. ¿Cuánto es su ganancia?
- a) S/. 20 b) S/. 15 c) S/. 40
d) S/. 60 e) S/. 45

Resolución:

$$P_v = P_c + g$$

$$140 = 20.5 + g$$

De donde: $g = 40$

12. Se vende un artículo en S/. 120 ganando el 30% del precio de costo, más el 9% del precio de venta. ¿Cuál es el precio de costo del artículo?
- a) S/. 84 b) S/. 168 c) S/. 126
d) S/. 42 e) S/. 35

Resolución:

$$P_v = P_c + g$$

$$120 = P_c + (30\% P_c + 9\% \cdot 120)$$

De donde: $P_c = 84$

13. Dos vacas fueron vendidas en S/. 6000 cada una. Si en la primera se ganó el 25% y en la segunda se

perdió el 25%, determinar si hubo ganancia o pérdida y cuánto.

- a) S/. 800 b) S/. 700
c) S/. 600 d) S/. 500
e) No se gana ni se pierde

Resolución:

$$6000 = 125\% P_c$$

De donde:

$$P_c = 4800$$

$$\rightarrow g = 1200$$

$$6000 = 75\% P_c$$

De donde:

$$P_c = 8000$$

$$\rightarrow \text{pérd.} = 2000$$

$\therefore$ Pérd. total = 800

14. ¿Qué precio debe fijarse a un artículo que costo S/. 4000, sabiendo que se hace una rebaja del 20% y todavía se gana el 30% del costo?
- a) S/. 5200 b) S/. 5400 c) S/. 5800
d) S/. 6000 e) S/. 6500

Resolución:

$$80\% P_f = 4000 + 30\% \cdot 4000$$

De donde:

$$P_f = 6500$$

15. Un comerciante compra una mercadería y la revende con un beneficio del 8% sobre el precio de compra. Si ganara el 8% sobre el precio de venta, resultaría una ganancia de S/. 8 más. Hallar el precio de compra.
- a) S/. 1205 b) S/. 1805 c) S/. 1260
d) S/. 1160 e) S/. 1250

Resolución:

$$P_v = P_c + g$$

$$P_v = P_c + 8\% P_c$$

$$P_v = 108\% P_c$$

$$8\% P_v = 8\% P_c + 8$$

$$8\% \cdot 108\% P_c = 8\% P_c + 8$$

De donde: $P_c = 1250$

PROBLEMAS PROPUESTOS

- Una cantidad disminuida en su 28% es 864. ¿Cuál es dicha cantidad?
a) 700 b) 800 c) 900
d) 1000 e) 1200
- Calcular el 25% del 10% del 40% de una cantidad cuyo 45% es equivalente al 25% del 36% de 48000.
a) 96 b) 69 c) 86
d) 76 e) 88
- En una industria se han fabricado 1000 productos. El 60% de ellos han sido fabricados por la máquina "A" y el resto por la máquina "B". Si se sabe que el 5% de lo fabricado por "A" son defectuosos y que el 4% de los de "B" también lo son, ¿cuántos defectuosos hay en los 1000 productos?
a) 30 b) 16 c) 46
d) 52 e) 54
- Un obrero observa que su salario ha sido descontando en un 25%. ¿Cuál debe ser el porcentaje de aumento del nuevo salario para que reciba su salario inicial?
a) 20% b) 23% c) 25%
d) 80/3% e) 100/3%
- En una reunión el 40% de las personas son varones. Si se retiran la mitad de éstos, ¿cuál es el nuevo porcentaje de varones?
a) 27,5% b) 25% c) 22,5%
d) 20% e) 18%
- En la compañía IBM filial Perú trabajan 420 personas, donde el 80% son varones. ¿Cuántas mujeres más deben contratarse para que el 30% del personal sea femenino?
a) 50 b) 52 c) 58
d) 60 e) 75
- Ronaldo debe lanzar 180 penales. Si ya ha convertido 40 goles, ¿cuántos más debe convertir para obtener una eficiencia del 90%?
a) 92 b) 102 c) 162
d) 112 e) 122
- Si gastara el 20% del dinero que tengo y ganara el 10% de lo que me quedaría, aún perdería S/.840. ¿Cuánto dinero tengo?
A) S/.5000
B) S/.6000
C) S/.7000
D) S/.8000
E) S/.9000
- A un artículo que costó S/.1400 lo venden ganando el 20% de su costo. ¿Cuál fue su precio de lista si le hicieron dos descuentos sucesivos del 20% y 30%?
a) S/.3000
b) S/.3500
c) S/.3200
d) S/.3800
e) S/.4000
- Un bodeguero vende en SA 160 un litro de vino con lo cual gana el 25% de su precio de costo. Calcular la ganancia y el precio de costo.
a) S/30 y S/.116
b) S/.31 y S/.118
c) S/.30 y S/.128
d) S/.30 y S/.118
e) S/.32 y S/.128
- El precio de un artículo es de S/.25 en una fábrica. Un comerciante adquiere seis de tales artículos por los que le hacen un descuento del 20%. Luego los vende obteniendo por todos ellos S/. 160. ¿Qué porcentaje del precio de venta está ganando?
a) 25% b) 28% c) 30%
d) 32% e) 35%
- Una persona vende un artículo en S/.4200 ganando el 19% del precio de costo, más el 15% del precio de venta. ¿Cuánto costó el artículo?
a) S/.2800 b) S/.3000 c) S/.3500
d) S/.3900 e) S/.4000

RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

13. Un comerciante vende dos artículos en S/.960 cada uno. Si en el primero gana el 20% y en el segundo pierde el 20%, determinar si hubo ganancia o pérdida y de cuánto.
- a) No se gana ni se pierde
b) Pierde S/.70
c) Pierde S/.80
d) Gana S/.80
e) Gana S/.70
14. Al precio fijado de un artículo se le hace un descuento del 10% y al momento de venderlo se gana el 30% del costo, el cual fue S/.180. Hallar el valor del precio fijado.
- a) S/.266 b) S/.280 c) S/.286
d) S/.290 e) S/.260
15. Se vende cierta mercadería ganando el 20% sobre el precio de compra. Se sabe que si se vendiera ganando el 20% sobre el precio de venta, se ganaría S/.400 más. Hallar el precio de compra.
- a) S/.6000 b) S/.8000 c) S/.9000
d) S/.10000 e) S/.12000

TAREA DOMICILIARIA

1. De un grupo de 800 señoritas el 3% de ellas usa un solo arete, el 50% de las restantes usa dos aretes. ¿Cuántos aretes hay?
- a) 800 b) 600 c) 450
d) 780 e) 400
2. Un granjero de pollos tiene 750 huevos de estos animales. El 4% de éstos se rompen y se encuentra que el 5% de los restantes son defectuosos apreciados a la luz. ¿Cuántos huevos pueden venderse en el mercado?
- a) 300 b) 450 c) 675
d) 684 e) 720
3. Un artículo al venderse se le descuenta el 10%, luego se le recarga el 10% pero se le vuelve a descontar el 10%, pagándose S/.8910. ¿Cuál era el precio inicial?
- a) S/.9500 b) S/.13000
c) S/.12500 d) S/.12000
e) S/.100000
4. Una persona dispone que al morir, su fortuna que asciende a S/.20000, se entregue a su hermano mayor el 35%, el 40% del resto a su hermano menor y el resto a un asilo. ¿Cuánto corresponde al asilo?
- a) S/.7800 b) S/.8000
c) S/.8400 d) S/.7600
e) S/.7500
5. En las elecciones municipales se observó que el 54% de los varones votaron por el partido "A", mientras que el 78% de las mujeres no votaron por dicho partido. Si acudieron a votar tantos hombres como mujeres, ¿qué porcentaje de votación alcanzó el partido "A"?
- a) 30% b) 36% c) 38%
d) 42% e) 76%
6. Una persona apostó todo su dinero ganando el 10%, luego apostó lo que tenía perdiendo el 80% y por última vez apostó todo el dinero que le quedó perdiendo el 70%, con lo cual se retiró únicamente con S/.66. ¿Cuánto dinero perdió?
- a) S/.880 b) S/.1034 c) S/.834
d) S/.934 e) S/.960
7. En un cajón hay 75 frutas, el 40% son naranjas y el resto manzanas. Si se aumentan 12 naranjas y se retiran 12 manzanas, ¿qué porcentaje del nuevo total son naranjas?
- a) 45% b) 48% c) 50%
d) 55% e) 56%

8. Durante la celebración de los 15 años de Roxana se retiran el 30% de las mujeres quedando un total de 54 personas. Luego se retiran el 30% de varones, quedando 42 personas. ¿Cuántas mujeres habían inicialmente?
a) 25 b) 20 c) 21
d) 27 e) 30
9. A una reunión asistieron 360 personas entre varones y mujeres, de las cuales el 70% de las mujeres y el 30% de los varones están sentados. Si 196 personas están de pie, ¿cuántos varones asistieron a dicha reunión?
a) 170 b) 160 c) 220
d) 140 e) 210
10. En cierto momento de una fiesta, el 60% de los varones están bailando y el 50% de las mujeres no bailan. Si en total fueron 330 personas, ¿qué porcentaje de los que no bailan son mujeres?
a) 30% b) 45% c) 60%
d) 75% e) 25%
11. Un recipiente contiene el 80% de vino y el resto de agua. Se extrae el 30% de la mezcla quedando 2,1 litros más de vino que de agua. ¿Cuántos litros contenía el recipiente?
a) 5 b) 6 c) 7
d) 8 e) 10
12. Una persona vende su caballo ganando el 30% y con este dinero compra otro y lo vuelve a vender, esta vez en S/.3822, perdiendo el 30%. ¿Cuánto costó el primer caballo?
a) S/.2940 b) S/.3600
c) S/.3800 d) S/.4000
e) S/.4200
13. ¿Qué porcentaje de la venta se ha ganado cuando se vende en S/.12000, un artículo que costó S/.9600?
a) 10% b) 15% c) 18%
d) 20% e) 25%
14. Una inmobiliaria vende dos lotes a \$6000 cada uno. En el primer lote pierde el 20% de lo que le costó y en el otro gana el 25% de su costo. ¿Ganó o perdió en la venta? ¿Cuánto?
a) Ganó \$ 200
b) Perdió \$ 300
c) Ganó \$ 300
d) Perdió \$ 1200
e) No ganó ni perdió
15. Una persona compró un artículo en S/.630. ¿En cuánto debe aumentar este precio, para que durante la venta haga una rebaja del 10% y aún así gane el 40% del costo?
a) S/.350 b) S/.380 c) S/.400
d) S/.450 e) S/.460

CLAVES DE RESPUESTA

1	2	3	4	5
A	D	E	A	C
6	7	8	9	10
D	E	B	C	C
11	12	13	14	15
A	E	D	B	A

Áreas de Regiones Sombreadas

Objetivos:

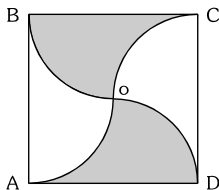
Al finalizar el capítulo el alumno estará en capacidad de:

- * Conocer los criterios teóricos básicos necesarios que le permitan calcular las áreas y los perímetros de determinadas regiones planas.
- * Asociar los problemas matemáticos aquí presentados con problemas reales que se le puede presentar en la vida diaria.

I. Traslación de Áreas Simétricas

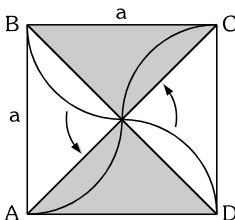
Ejemplo:

1. Si ABCD es un cuadrado cuyo lado mide "a" cm. Calcular el área de la región sombreada.



Resolución

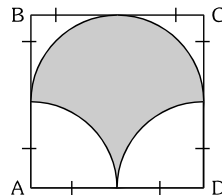
Trazando las diagonales del cuadrado y transponiendo las áreas de las regiones sombreadas, como se muestra en la figura.



Luego el área de la región sombreada es la mitad del área total.

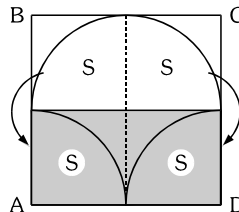
$$A_{\text{somb.}} = \frac{a^2}{2} \text{ cm}^2$$

2. Si ABCD es un cuadrado cuyo lado mide "a" cm. Calcular el área de la región sombreada.



Resolución

Trazando rectas paralelas a los lados y trasladando las regiones sombreadas.



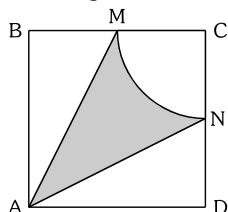
Luego el área de la región sombreada es la mitad del área total.

$$A_{\text{somb.}} = \frac{a^2}{2} \text{ cm}^2$$

II. Diferencia de Áreas

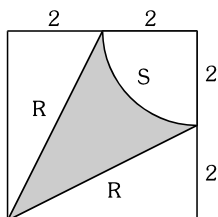
Ejemplos:

- Si ABCD es un cuadrado cuyo lado mide 4 cm y además M y N son puntos medios, calcular el área de la región sombreada.



Resolución

Del gráfico:

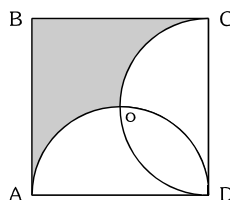


La figura "S" representa la cuarta parte de un círculo. Las dos figuras "R" juntas representan la mitad del cuadrado. Luego, para calcular lo sombreado habría que hacer una resta de áreas, o sea:

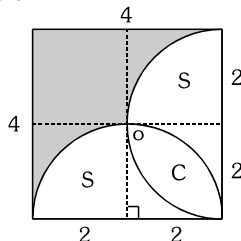
$$\begin{aligned}
 A_{\text{somb.}} &= \square - \square - \frac{\square}{4} - \frac{\bigcirc}{2} \\
 &= 4^2 - \frac{4^2}{2} - \frac{\pi 2^2}{4} \\
 &= 16 - 8 - \pi \Rightarrow (8 - \pi)
 \end{aligned}$$

$$(8 - \pi) \text{ cm}^2$$

- Si "O" es centro del cuadrado ABCD cuyo lado mide 4 cm; entonces, el área de la región sombreada será:



Resolución



Del gráfico:

Las 2 figuras "S" representan la mitad de un círculo.

La figura "C" representa la cuarta parte del cuadrado, luego:

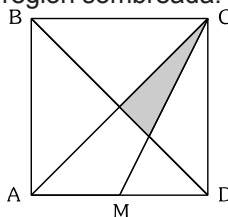
$$\begin{aligned}
 A_{\text{somb.}} &= \square - \frac{\square}{4} - \frac{\bigcirc}{2} \\
 &= 4^2 - \frac{4^2}{2} - \frac{\pi 2^2}{4} \\
 &= 16 - 4 - 2\pi \Rightarrow 12 - 2\pi
 \end{aligned}$$

$$2(6 - \pi) \text{ cm}^2$$

III. Áreas por Medianas

Ejemplos:

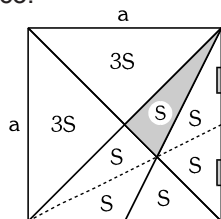
- Si ABCD es un cuadrado cuyo lado mide "a" cm, y además "M" es punto medio; calcular el área de la región sombreada.



RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

Resolución

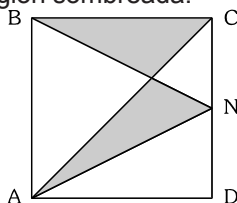
Del gráfico:



Por la propiedad de las medianas:

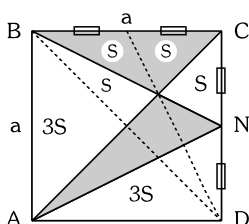
$$A_{\text{somb.}} = \frac{a^2}{12}$$

2. Si ABCD es un cuadrado cuyo lado mide "a" cm y además "N" es punto medio. Calcular el área de la región sombreada.



Resolución

Del gráfico:



Por la propiedad de las medianas.

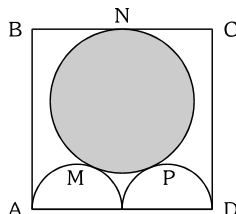
$$A_{\text{somb.}} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{6} - \frac{a^2}{6}$$

$$A_{\text{somb.}} = a^2 - \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{6} = \frac{a^2}{3}$$

IV. Áreas por Tangentes

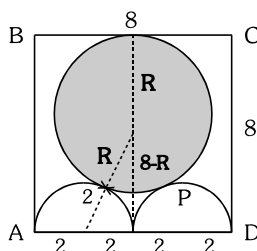
Ejemplos:

1. Si ABCD es un cuadrado cuyo lado mide 8 cm, además M, N y P son puntos de tangencia, calcular el área de la región sombreada.

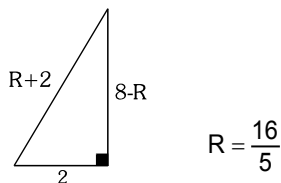


Resolución

Del gráfico:



Aplicando el Teorema de Pitágoras:

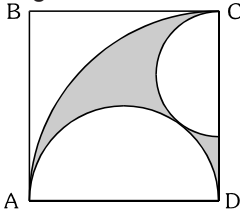


$$R = \frac{16}{5}$$

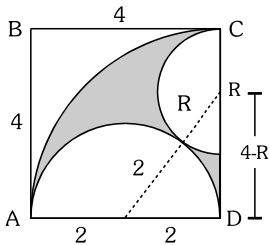
Luego: $A_{\text{somb.}} = \pi \left(\frac{16}{5} \right)^2 \text{ cm}^2$

$$\frac{256\pi}{25} \text{ cm}^2$$

2. Si ABCD es un cuadrado cuyo lado mide 4 cm. Calcular el área de la región sombreada.

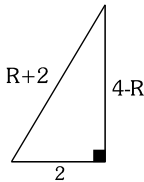


Resolución
Del gráfico:



Aplicando el Teorema de Pitágoras

$$R = \frac{4}{3} \quad (R+2)^2 = 2^2 + (4-R)^2$$



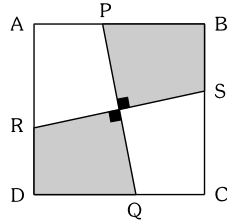
$$A_{\text{somb.}} = \frac{\pi \cdot 4^2}{4} - \frac{\pi \cdot 2^2}{2} - \frac{\pi \cdot (4/3)^2}{2}$$

$$= \frac{\pi \cdot 4^2}{4} - \frac{\pi \cdot 2^2}{2} - \frac{\pi \cdot (4/3)^2}{2}$$

$$= 4\pi - 2\pi - \frac{16\pi}{18}$$

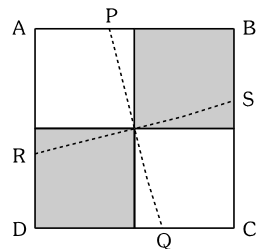
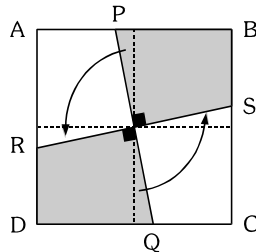
$$\boxed{\frac{20\pi}{18} \text{ cm}^2}$$

3. En el cuadrado ABCD. PQ y RS pasan por el punto de intersección de las diagonales. ¿Qué parte del cuadrado representa el área de la región sombreada?



Resolución

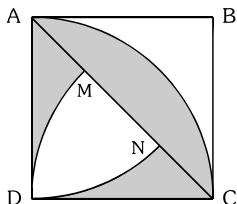
Trazamos las líneas paralelas a los lados AB y BC; luego hacemos traslación de áreas.



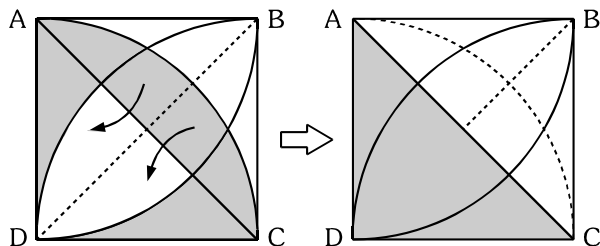
$$\boxed{A_{\text{somb.}} = \frac{1}{2} A \text{ cuadrado}}$$

RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

4. Hallar el área de la región sombreada, si el lado del cuadrado mide 8 m.



Resolución

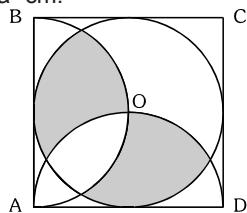


El área sombreada representa la mitad del área del cuadrado.

$$S = \frac{1}{2}(8)^2 \quad \therefore \quad \boxed{S=32\text{m}^2}$$

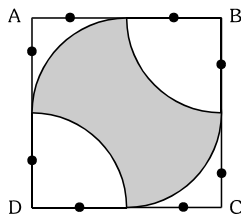
PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Calcular el área de la región sombreada de la siguiente figura; si ABCD es un cuadrado cuyo lado mide "a" cm.



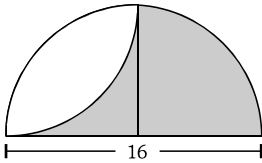
- a) $\frac{\pi a^2}{8} \text{ cm}^2$ b) $\frac{\pi a^2}{12} \text{ cm}^2$
 c) $\frac{\pi a^2}{4} \text{ cm}^2$ d) $\pi a^2 \text{ cm}^2$
 e) $\frac{\pi a^2}{16} \text{ cm}^2$

2. Calcular el área de la región sombreada; si el lado del cuadrado es "L".



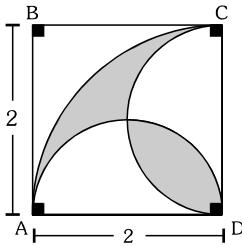
- a) $\frac{L^2}{2}$ b) $\frac{L^2}{4}$ c) $\frac{L^2}{3}$
 d) $\frac{L^2}{5}$ e) $\frac{L^2}{6}$

3. En la figura, calcular el área de la región sombreada en la semicircunferencia.



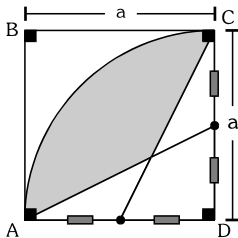
- a) $16\pi u^2$ b) $8+4\pi u^2$ c) $32\pi u^2$
d) $64\pi u^2$ e) $64 u^2$

4. Calcular el área de la región sombreada de la siguiente figura.



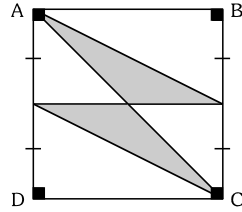
- a) $4(\pi-2) u^2$ b) $4 u^2$ c) $\pi-2 u^2$
d) $3(\pi+2) u^2$ e) $\pi+2 u^2$

5. Calcular el área de la región sombreada:



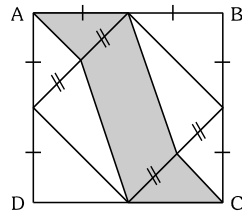
- a) $\frac{a^2}{12}(3\pi-4) u^2$ b) $a^2(\pi-2) u^2$
c) $\frac{a^2}{6}(\pi+2) u^2$ d) $a^2(\pi+2) u^2$
e) $\frac{3a^2}{4} u^2$

6. Calcular el área de la región sombreada; si: $\overline{AB} = a$. (cuadrado)



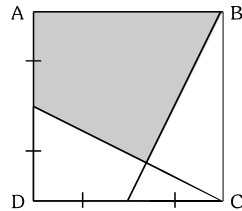
- a) $\frac{a^2}{4} u^2$ b) $\frac{a^2}{2} u^2$ c) $\frac{3a^2}{2} u^2$
d) $\frac{3a^2}{4} u^2$ e) $\frac{a^2}{9} u^2$

7. Calcular el área de la región sombreada; si: $\overline{AB} = a$



- a) $\frac{3a^2}{7} u^2$ b) $\frac{3a^2}{8} u^2$ c) $\frac{2a^2}{5} u^2$
d) $\frac{2a^2}{7} u^2$ e) $\frac{a^2}{4} u^2$

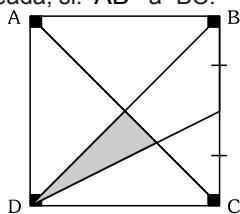
8. Calcular el área de la región sombreada; si $\overline{AB} = a$, y además ABCD es un cuadrado.



- a) $\frac{11a^2}{20} u^2$ b) $\frac{5a^2}{7} u^2$ c) $\frac{3a^2}{8} u^2$
d) $\frac{a^2}{6} u^2$ e) $\frac{a^2}{4} u^2$

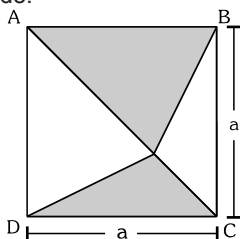
RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

9. Calcular el área de la región sombreada; si: $\overline{AB} = a = BC$.



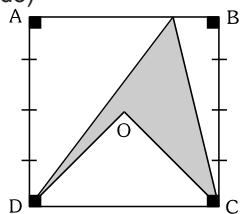
- a) $\frac{a^2}{12} u^2$ b) $\frac{a^2}{11} u^2$ c) $\frac{a^2}{10} u^2$
 d) $\frac{a^2}{9} u^2$ e) $\frac{a^2}{8} u^2$

10. Calcular el área de la región sombreada; si: ABCD es un cuadrado.



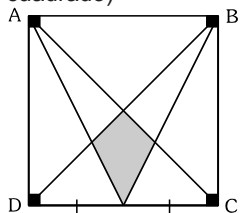
- a) $\frac{a^2}{3} u^2$ b) $\frac{a^2}{4} u^2$ c) $\frac{a^2}{5} u^2$
 d) $\frac{a^2}{2} u^2$ e) $a^2 u^2$

11. Calcular el área de la región sombreada; si: $\overline{AB} = a$ (ABCD cuadrado)



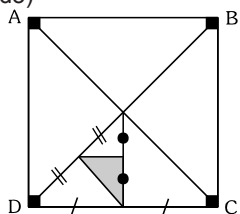
- a) $\frac{a^2}{3} u^2$ b) $\frac{a^2}{4} u^2$ c) $\frac{a^2}{5} u^2$
 d) $\frac{a^2}{2} u^2$ e) $a^2 u^2$

12. Calcular el área de la región sombreada; si: $\overline{AB} = a$ (ABCD cuadrado)



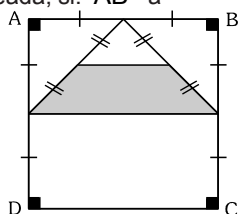
- a) $\frac{a^2}{10} u^2$ b) $\frac{3a^2}{11} u^2$ c) $\frac{a^2}{12} u^2$
 d) $\frac{a^2}{4} u^2$ e) $\frac{a^2}{20} u^2$

13. Calcular el área de la región sombreada; si: $\overline{AB} = a$ (ABCD cuadrado)



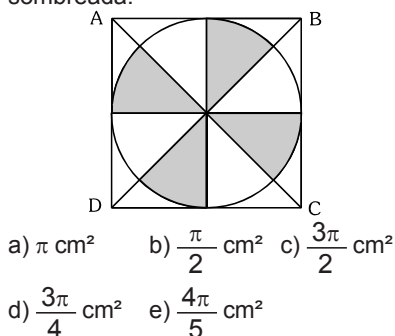
- a) $\frac{a^2}{12} u^2$ b) $\frac{2a^2}{5} u^2$ c) $\frac{3a^2}{8} u^2$
 d) $\frac{a^2}{32} u^2$ e) $\frac{a^2}{10} u^2$

14. Calcular el área de la región sombreada; si: $\overline{AB} = a$



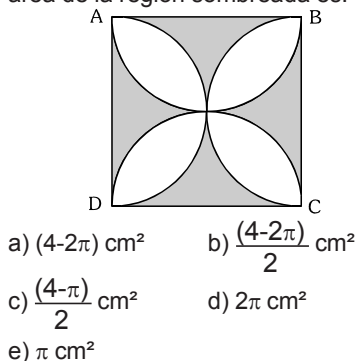
- a) $\frac{3a^2}{8} u^2$ b) $\frac{3a^2}{16} u^2$ c) $\frac{2a^2}{3} u^2$
 d) $\frac{a^2}{2} u^2$ e) $a^2 u^2$

15. Si ABCD es un cuadrado cuyo lado mide 2 cm, hallar el área de la región sombreada.

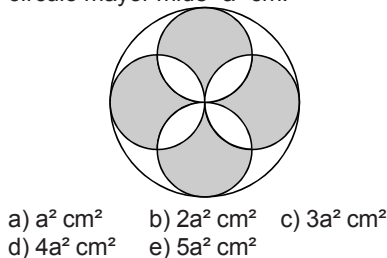


TAREA DOMICILIARIA

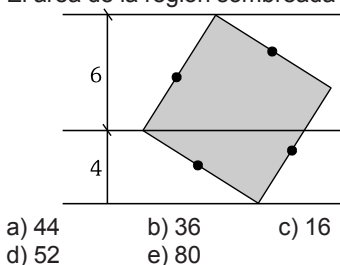
1. El área del cuadrado mide 1 cm, el área de la región sombreada es:



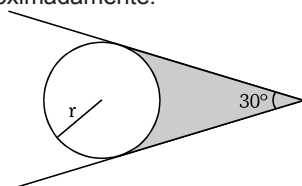
2. De la figura mostrada, calcular el área de la región sombreada; si el radio del círculo mayor mide "a" cm.



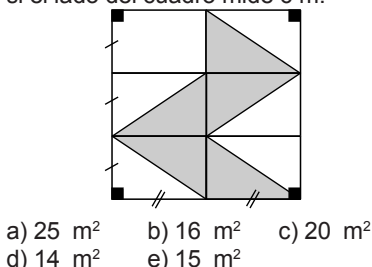
3. El área de la región sombreada es:



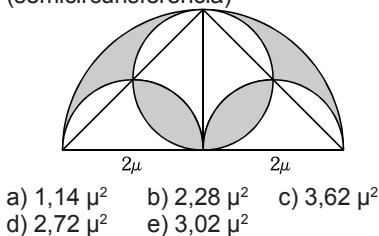
4. El área de la región sombreada es aproximadamente:



- a) $0,69 r^2$ b) $0,535 r^2$ c) $0,45 r^2$
 d) $0,21 r^2$ e) r^2
5. Hallar el área de la región sombreada, si el lado del cuadro mide 6 m.

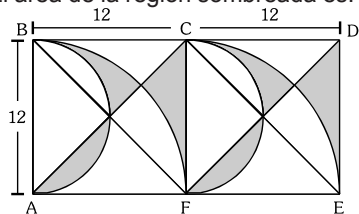


6. Hallar el área de la región sombreada. (semicircunferencia)



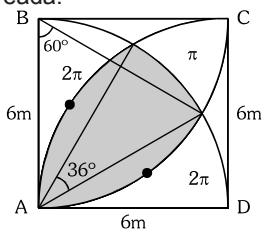
RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

7. El área de la región sombreada es:



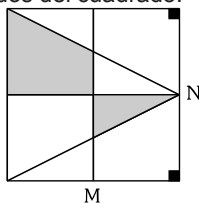
- a) $48 u^2$ b) $84 u^2$ c) $72 u^2$
d) $96 u^2$ e) $42 u^2$

8. Hallar el perímetro de la región sombreada.



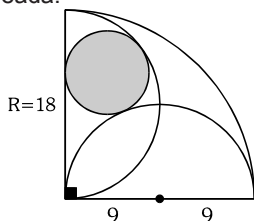
- a) $4\pi m$ b) $2\pi m$ c) $5\pi m$
d) $6\pi m$ e) $3\pi m$

9. Hallar la razón del área de la región sombreada al área de la región no sombreada; M y N son puntos medios de los lados del cuadrado.



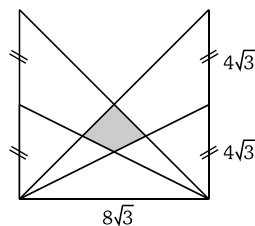
- a) 3:7 b) 2:7 c) 1:6
d) 2:3 e) 1:3

10. Hallar el área de la región sombreada.



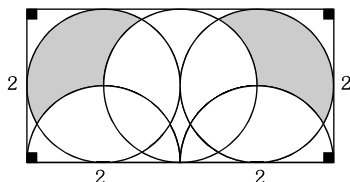
- a) $6 u^2$ b) $8 u^2$ c) $5 u^2$
d) $4 u^2$ e) $2 u^2$

11. Hallar el área de la región sombreada.



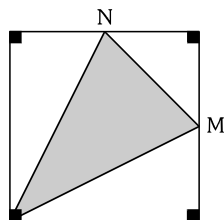
- a) $3,072 u^2$ b) $3,28 u^2$
c) $\frac{1}{12}(\pi+33) u^2$ d) $\frac{1}{69}(\pi+33) u^2$
e) $\frac{1}{6}(\pi+53) u^2$

12. Hallar el área de la región sombreada.



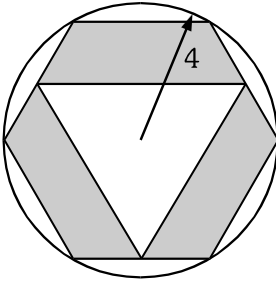
- a) $3,072 u^2$ b) $3,28 u^2$
c) $\frac{1}{12}(\pi+33) u^2$ d) $\frac{1}{69}(\pi+33) u^2$
e) $\frac{1}{6}(\pi+53) u^2$

13. Si M y N son puntos medios de los lados del cuadrado, hallar la razón del área de la región no sombreada y el área de la región sombreada.



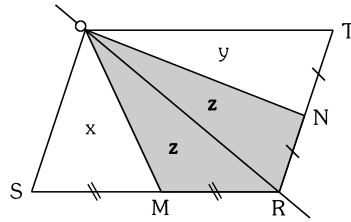
- a) $3/8$ b) $5/8$ c) $7/8$
d) $1/8$ e) $5/3$

14. Hallar el área de la región sombreada, si el radio del círculo mide 4 m.



- a) 15 m^2 b) 12 m^2 c) 18 m^2
d) 10 m^2 e) 20 m^2

15. Siendo M y N los puntos medios de los lados SR y RT del paralelogramo SRTQ, se afirma que el área de la región sombreada es:
- I. El doble de x.
 - II. El doble de y.
 - III. Igual a $(x+y)$



Son verdaderos:

- a) sólo I b) sólo II
c) sólo III d) I y II
e) todas

CLAVES DE RESPUESTA

1	2	3	4	5
C	B	D	A	E
6	7	8	9	10
B	C	C	E	C
11	12	13	14	15
B	B	E	B	E

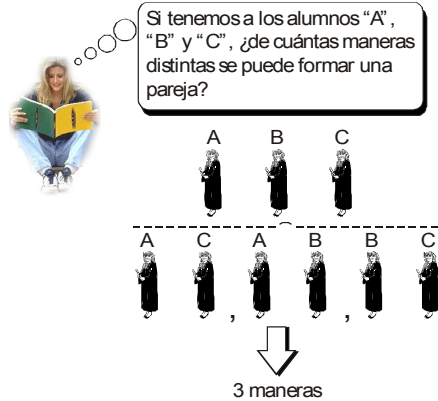
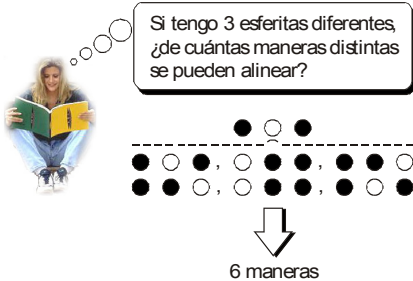
Análisis Combinatorio

Objetivo

Al finalizar el presente capítulo el alumno estará en la capacidad de:

- Responder cuáles son las técnicas de conteo y que son permutaciones y combinaciones.
- Comprender que los conceptos que aprenderá se pueden aplicar para resolver problemas en nuestra vida diaria y que también tienen aplicación en otras áreas de la matemática como la estadística.

Marco Teórico



PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE CONTEO

En los ejemplos anteriores nos damos cuenta que dado un evento particular (alinearlas 3 esferitas o formar una pareja), estamos interesados en conocer todas las maneras distintas en que puede ocurrir. Para determinar las veces, haremos uso de las técnicas de conteo, que serán de gran ayuda en estos casos.

1. Principio de Multiplicación (Teorema fundamental del análisis combinatorio)

Si un evento «A» ocurre de «m» maneras; y para cada una de éstas, otro evento «B» ocurre de «n» maneras; entonces el evento «A» seguido de «B» ocurre de «mxn» maneras.

Observaciones:

- En este principio la ocurrencia es uno a continuación del otro, es decir, ocurre el evento «A» y luego ocurre al evento «B»
- Este principio se puede generalizar para más de dos eventos.

Ejemplos:

Cuántos resultados diferentes se pueden obtener al lanzar una moneda y un dado simultáneamente?

Resolución:

Lanzar una moneda y lanzar un dado: $2 \times 6 = 12$

2. Principio de Adición

Si un evento «A» ocurre de «m» maneras y otro evento «B» ocurre de «n» maneras, entonces el evento A o B, es decir, no simultáneamente, ocurre de «m+n» maneras.

Observaciones:

- En este principio la ocurrencia no es simultáneamente, es decir, ocurre el evento «A» o el evento «B», pero no ambos a la vez.
- Este principio se puede generalizar para más de 2 eventos.

Ejemplo:

Supongamos que proyectamos un viaje y debemos decidir entre el transporte por bus o tren. Si hay tres rutas para el tren y dos para el bus. ¿De cuántas maneras podremos escoger?

PERMUTACIÓN

Es un arreglo u ordenación que se puede formar con una parte o con todos los elementos disponibles de un conjunto. En una permutación si interesa el orden de sus elementos. Se pueden presentar en tres casos:

1. Permutación Lineal

Es un arreglo u ordenación de elementos en línea recta.

Si tenemos un conjunto de cuatro elementos, $A = \{a, b, c, d\}$, los posibles arreglos o permutaciones de este conjunto tomados de 2 en 2 son:

a	b	c	d
a	b	c	d
a	b	c	d

Vemos que hay 12 permutaciones distintas.

RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

En general: El número de permutaciones de «n» elementos diferentes tomados de «K» en «K», se calcula como:

$$P_K^n = \frac{n!}{(n-K)!}; \quad \begin{matrix} 0 < K \leq n \\ 1 \leq K \leq n \end{matrix} \quad \text{ó} \quad V_K^n = \frac{n!}{(n-K)!} \quad V = \text{variación}$$

Observaciones:

- Cuando se toman todos los elementos del conjunto para ordenarlos o permutarlos, es decir, ($K=n$), se dice que es una permutación de "n" elementos y se denota por P.

$$P_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1!}$$

$$P_n^n = P_n = n!$$

$$\Rightarrow \boxed{P_n = n!}$$

Aplicación:

¿De cuántas maneras diferentes pueden formarse 5 soldados en una fila?

Resolución

$$P_5 = 5! = \boxed{120}$$

2. Permutación Circular

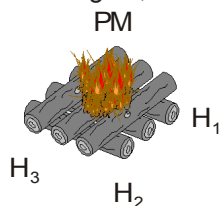
Es un arreglo u ordenación de elementos diferentes alrededor de un objeto; en estas ordenaciones no hay primer ni último elemento, por hallarse todo en línea cerrada.

Luego:

$$\boxed{PC_{(n)} = (n-1)!}$$

Una familia con 3 hijos salen al campo. Una vez que llegaron al campo prenden una fogata.

¿De cuántas maneras diferentes se pueden sentar los miembros de esta familia alrededor de la fogata, de modo que los padres siempre estén juntos?



$$P_2 = 2! = 2$$

$$P_{C(4)} = (4-1)! = 6$$

$$\text{Rpta: } 2 \times 6 = \boxed{12}$$

3. Permutación con Elementos Repetidos

Es un arreglo u ordenación de elementos no todos diferentes (elementos repetidos). Si se tienen «n» elementos donde hay:

K_1 elementos repetidos de una 1ra. clase

K_2 elementos repetidos de una 2da. clase

$\vdots$

$\vdots$

K_r elementos repetidos de r-ésima clase

El número de permutaciones diferentes con «n» elementos, los cuales tienen elementos que se repiten. Se calcula como sigue:

$$P_{K_1, K_2, \dots, K_r}^n = \frac{n!}{K_1! \times K_2! \times \dots \times K_r!}$$

Donde:

$$K_1 + K_2 + \dots + K_r = n$$

Aplicación:

Una moneda cuyas caras están marcadas con los números 2 y 3, respectivamente, es tirada 5 veces. Determinar de cuántas maneras se obtendrá como suma 12.

Resolución

2 2 2 3 3
2 3 2 3 2
3 3 2 2 2
⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮
⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮

$$\begin{aligned} P_{2,3}^5 &= \frac{5!}{2! \times 3!} \\ &= \frac{5 \times 4 \times 3!}{1 \times 2 \times 3!} \\ &= 10 \end{aligned}$$

COMBINACIÓN

Es una selección o grupo que se puede formar con una parte o con todos los elementos disponibles de un conjunto.

Es una combinación, no interesa el orden de sus elementos.

A través de un ejemplo nos daremos cuenta que hay una estrecha relación entre las permutaciones y las combinaciones.

Dado el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$, calcular el número de permutaciones y el número de combinaciones y el número de combinaciones de los elementos de «A» tomados de 3 en 3.

RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

PERMUTACIONES	COMBINACIÓN
abc, acb, bac, bca, cab, cba $\Rightarrow 6$	abc $\Rightarrow 1$
abd, adb, bad, bda, dab, bda $\Rightarrow 6$	abd $\Rightarrow 1$
acd, adc, cad, cda, dac, dca $\Rightarrow 6$	acd $\Rightarrow 1$
bcd, bdc, cbd, cdb, dbc, dcb $\Rightarrow 6$	bcd $\Rightarrow 1$
Total $24 = P_3^4$	Total $4 = C_3^4$

En general, el número de combinaciones de «n» elementos diferentes tomados de «K» en «K», se calcula como:

$$C_K^n = \frac{n!}{K!(n-K)!} ; \begin{matrix} 0 < K \leq n \\ 1 \leq K \leq n \end{matrix}$$

Observaciones:

Cuando se toman todos los elementos del conjunto para agruparlos o combinarlos (es decir, $K=n$), se dice que es una combinación de «n» elementos y:

$$C_n^n = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n! \times 0!} = 1$$

$$C_n^n = 1$$

Aplicación

Cuando John quiso ir a «Expociencia», 5 amigas lo quisieron acompañar; sin embargo, él quería ir solamente con dos amigas. ¿De cuántas maneras diferentes pudo haber ido acompañado por 2 amigas?

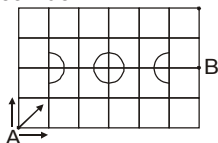
$$C_2^5 = \frac{5!}{2! \times (5-2)!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{1 \times 2 \times 3!} = 10$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

- Entre «A» y «B» hay 4 caminos diferentes, y entre «B» y «C» hay 3 caminos diferentes. ¿De cuántos formas puedo ir de «A» a «C» pasando por B, si de regreso no puedo usar la ruta de ida?
a) 120 b) 72 c) 132
d) 96 e) 14
- Una alumna tiene para vestirse 4 blusas, 3 pantalones, 2 faldas y 6 pares de zapatos. ¿De cuántas formas se podrá vestir?
a) 110 b) 144 c) 120
d) 72 e) 96
- ¿Cuántas palabras de 6 letras diferentes y que terminan en A, se pueden formar con las letras de la palabra ROSITA?
a) 720 b) 120 c) 240
d) 24 e) 48
- Se tienen pesas de 1; 2; 7; 8; 9 y 15 kilos, habiendo una de cada una. ¿Cuántos pesadas se pueden hacer, tomándolas de 2 en 2?
a) 24 b) 30 c) 40
d) 15 e) 10
- De Lima a Trujillo hay 7 buses diferentes. ¿De cuántas maneras se puede ir a Trujillo y regresar en un bus diferente?
a) 7! b) 30 c) 42
d) 6! e) 210
- ¿Cuántas banderas bicolors se pueden diseñar con telas de 5 colores?
a) 12 b) 15 c) 10
d) 40 e) 20
- Con 7 varones y 5 mujeres se van a formar comités mixtos de 6 personas. ¿De cuántas maneras se pueden formar si en el comité hay 2 mujeres?
a) 240 b) 350 c) 700
d) 720 e) 210
- Un asta tiene 3 posiciones y se disponen de 4 banderas diferentes. ¿Cuántas señales diferentes se pueden hacer colocando 2 banderas?
a) 12 b) 48 c) 36
d) 72 e) 24
- Se tiene 4 consonantes y 3 vocales. ¿Cuántas palabras de 5 letras diferentes se pueden formar con 3 consonantes y 2 vocales?
a) 720 b) 1440 c) 2880
d) 540 e) 14 400
- En un plano hay 10 puntos, sólo 3 de ellos son colineales. ¿Cuántas rectas como máximo se podrán formar? (obs la unión de 2 puntos forma una recta).
a) 45 b) 44 c) 43
d) 42 e) 36
- Cuántas señales diferentes pueden emitirse con dos focos rojos, dos amarillos y 3 azules en un juego de luces que tiene 7 portafocos?
a) 120 b) 96 c) 210
d) 360 e) 420
- ¿De cuántas formas diferentes se pueden ubicar en un automóvil 5 personas, sabiendo que sólo 3 de ellos saben conducir?
a) 72 b) 96 c) 60
d) 120 e) 147
- Se tiene 6 tirallitas (cajas), en las cuales se deben colocar 13 bolas diferentes. ¿De cuántas maneras se pueden colocar si en la primera tirallita se deben colocar 3 bolas, en la última tirallita 4 bolas y las restantes en las demás, respectivamente?
a) 60060×4^6
b) 210×4^6
c) 286×4^6
d) 13!
e) $13!/6!$

RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

14. John, jugador estrella de la «xxxx» debe recorrer la cancha del Nacional de «A» a «B», según los movimientos indicados por la flecha. ¿De cuántas maneras es posible que John haga dicho recorrido?

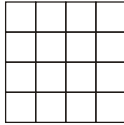


- a) 80 b) 81 c) 83
d) 85 e) 90
15. En un restaurante hay 10 comidas diferentes. Entran 3 personas y cada uno pide un plato diferente al de otro. ¿De cuántas maneras se puede hacer el pedido?
- a) 720 b) 45 c) 90
d) 110 e) 9

TAREA DOMICILIARIA

1. Con 7 consonantes 5 vocales diferentes, ¿cuántas palabras pueden formarse que consten de 4 consonantes y 3 vocales? (no es necesario que las palabras tengan significado).
- a) 1 764 000 b) 50 400
c) 5040 d) 1080
e) 350
2. Un sistema de cómputo emplea PASSWORDS (código de entrada) que consisten de 5 letras seguidas por un solo dígito. Determinar cuántos códigos de PASSWORDS consisten de tres letras A y 2 letras B y termina en un dígito impar.
- a) 720 b) 360 c) 180
d) 120 e) 50
3. Un producto se arma en tres etapas. En la primera etapa hay 5 líneas de armado; en la segunda etapa hay 4 líneas de armado; y en la tercera hay 5 líneas de armado; ¿de cuántas maneras puede moverse el producto en el proceso de armado?
- a) 120 b) 180 c) 240
d) 300 e) 250
4. Un club de voley tiene en total 9 jugadoras, de las que en cada partido sólo pueden jugar 6 de ellas. ¿Cuántos equipos diferentes de 6 jugadoras cada uno podría formarse en este club, sabiendo que en todos ellos siempre tiene que estar como capitana la misma jugadora?
- a) 63 b) 56 c) 112
d) 72 e) más de 112
5. En una fila de 6 asientos se desean sentar 3 hombres y 1 mujer. ¿De cuántas maneras lo podrán hacer si a un lado de la mujer están los 3 hombres?
- a) 24 b) 180 e) 90
d) 160 e) 270
6. ¿Cuántas señales diferentes pueden hacerse izando 5 banderas de diferentes colores una sobre otra, si pueden izarse cualquier números de ellas a la vez?
- a) 325 b) 360 c) 203
d) 225 e) 240
7. ¿Cuántas placas para automóviles pueden hacerse si cada placa consta de dos letras diferentes seguidas de tres dígitos diferentes? (considerar 26 letras del alfabeto)
- a) 676 000 b) 936 000
c) 642 000 d) 468 000
e) 234 000
8. El aula selección de una academia consta de 12 alumnos a los cuales se les toma el examen final. ¿Cuántas opciones distintas se tiene para ocupar los 4 primeros puestos si no hay empate?
- a) 11 320 b) 13 200 c) 11 200
d) 11 880 e) 12 400

9. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden colocar 12 libros iguales en un estante cuya forma es la que se indica en la figura si se desea que en cada casilla haya a lo más un libro, y en cada fila y en cada columna 3 libros?



- a) 6
d) 30
- b) 12
e) 16
- c) 24
10. Se quieren sentar 5 hombres y 4 mujeres en una fila de modo que las mujeres ocupen los sitios pares. ¿De cuántas formas pueden sentarse?
- a) 51 840
d) 120
- b) 2 880
e) 24
- c) 144
11. ¿De cuántas formas se pueden sentar en una fila de 5 asientos 3 hombres y 2 mujeres de tal manera que las mujeres estén siempre juntas?
- a) 120
d) 48
- b) 12
e) 96
- c) 24

12. Determinar cuántas palabras diferentes se podrán formar con las letras de la palabra «ARRANCARÁ», con o sin significado.
- a) 360
d) 2520
- b) 720
e) 7560
- c) 1440

13. De un total de 5 matemáticos y 7 físicos se forma un comité de 2 matemáticos y 3 físicos. ¿De cuántas maneras pueden formarse si puede pertenecer a él cualquier matemático o físico?
- a) 350
d) 75
- b) 150
e) 35
- c) 175

14. En una reunión de 5 amigos que se están preparando para ingresar a la UNI acordaron estudiar en grupo. ¿Cuántos grupos diferentes se podrán formar?
- a) 64
d) 26
- c) 31
e) 25
- d) 30

15. La barra de una cafetería tiene 7 asientos en una fila. Si 4 persona desconocidas entre sí ocupan lugares al azar, ¿de cuántas maneras diferentes pueden quedar los 3 asientos restantes desocupados?
- a) 720
d) 840
- b) 1440
e) 800
- c) 4320

CLAVES DE RESPUESTA

1	2	3	4	5
A	E	A	B	B
6	7	8	9	10
A	D	D	C	B
11	12	13	14	15
D	D	A	D	D

Probabilidades

1. Experimento Aleatorio (ε)

Es cualquier experimento cuyo resultado no se puede predecir con exactitud antes de realizar el experimento ya que consta con más de 1 resultado posible.

2. Espacio Muestral (Ω)

Es un conjunto formado por todos los resultados posibles de un experimento aleatorio.

Ejemplo 1:

ε_1 : En el lanzamiento de una moneda $Q = \{C; S\}$

Ejemplo 2:

ε_2 : En el lanzamiento de un dado $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

3. Evento ($A; B; C; \dots$)

Se llama evento a cualquier subconjunto del espacio muestral.

Ejemplo:

Al lanzar un dado cuales son los números primos que aparecen

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$$

$$A = \{2; 3; 5\}$$

Se observa que $A \subset Q$

4. Definición clásica de Probabilidad

Se define la probabilidad de un evento "A" ($P(A)$) al cociente entre el número de casos favorables y el número de casos posibles:

$P(A) = \frac{\text{\# casos favorables del evento A}}{\text{\# total de casos posibles en } \Omega}$

Propiedades

1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. Si "A" es un evento imposible: $P(A) = 0$
3. Si "A" es un evento seguro: $P(A) = 1$

4. Sean A y B eventos independientes:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

5. Sean A y B eventos no excluyentes:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

6. Sean A y B eventos excluyentes:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

7. Siendo $\bar{A}$ evento contrario de A:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

8. Probabilidad condicional:

$$P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Al lanzar una moneda 3 veces consecutivas, ¿cuál es la probabilidad de obtener tres sellos?

Resolución

Casos totales:

$$2 \times 2 \times 2 = 8$$

Casos favorables:

$$\underbrace{S \quad S \quad S}_{\text{tres sellos}} \rightarrow 1$$

$$\frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}} = \frac{1}{8}$$

∴ La probabilidad es $\frac{1}{8}$.

2. Una ficha cuyas caras están marcadas con los números 3 y 4 respectivamente es lanzada 5 veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un total de 17?

Resolución

Casos totales:

$$2^5 = 8$$

Casos favorables:

$$10$$

$$P_{(3,2)}^5 = \frac{5!}{3! \times 2!} = 10 \text{ (permutación con repetición)}$$

$$\Rightarrow P(\text{suma total sea } 17) = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$$

∴ La probabilidad de que la suma total sea 17 es $\frac{5}{16}$.

RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

3. En una caja hay 10 bolas numeradas de 1 al 10, se extrae al azar una bola. ¿Cuál es la probabilidad que el número de la bola extraída no exceda a 10?

Resolución

$$P(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}} = \frac{10}{10} = 1$$

⇒ Es un evento seguro.

4. Emerson dispara a un blanco. Si la probabilidad de acertar un disparo es 0,10. ¿Qué probabilidad tiene Emerson de no acertar?

Resolución

Los eventos considerados son complementarios:

$$\underbrace{P(\text{acierto})}_{0,01} + P(\text{no acierto}) = 1$$

$$\Rightarrow P(\text{no acierto}) = 1 - 0,01 = 0,99$$

5. De un juego normal de naipes (casinos). ¿Cuál es la probabilidad de obtener un As al extraer una carta?

Resolución

La baraja tiene 52 cartas de las cuales 4 son ases, luego:

$$P(\text{As}) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

- En una reunión se encuentran presentes 30 hombres y 20 mujeres. Si se eligen a 2 personas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que las personas elegidas sean varón y mujer?
a) $\frac{15}{49}$ b) $\frac{18}{49}$ c) $\frac{20}{49}$ d) $\frac{25}{49}$ e) $\frac{24}{49}$
- En una caja se tienen 90 bolos numerados del 1 al 90. Si se extrae un bolo, ¿cuál es la probabilidad de que sea múltiplo de 3 ó 7?
a) $\frac{19}{45}$ b) $\frac{17}{31}$ c) $\frac{19}{90}$ d) $\frac{38}{45}$ e) $\frac{12}{17}$
- Se tienen 30 fichas numeradas del 11 al 40. Se eligen 2 al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que los bolos tengan numeración consecutiva?
a) $\frac{2}{15}$ b) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{15}$ e) $\frac{1}{10}$
- Se lanza cuatro monedas en forma simultánea. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un sello y 3 caras?
a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{3}{16}$ c) $\frac{1}{8}$ d) $\frac{3}{8}$ e) $\frac{1}{16}$
- Se lanzan dos dados. Halle la probabilidad de obtener una suma múltiplo de 3.
a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{4}$
- Emerson desea viajar al Cusco, pero sólo puede hacerlo por avión o por ómnibus. Si la probabilidad de que viaje en avión es el cuádruple de que viaje en ómnibus, además la probabilidad de que no viaje es 0,75, ¿cuál es la probabilidad de que viaje en ómnibus?
a) $\frac{3}{20}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{1}{25}$ e) $\frac{1}{20}$
- En una carrera automovilística participan 3 peruanos, 3 bolivianos y 5 colombianos. Si todos tienen igual posibilidad de ganar, ¿cuál es la probabilidad de que llegue primero un colombiano y segundo un peruano?
a) $\frac{2}{11}$ b) $\frac{3}{22}$ c) $\frac{3}{11}$ d) $\frac{4}{11}$ e) $\frac{8}{21}$
- La cerradura de una bóveda está conformada por 4 anillos donde cada anillo contiene dígitos del 0 al 9. ¿Cuál es la probabilidad de abrir la bóveda con una combinación realizada al azar, si sabemos que la bóveda se abre con una combinación de dígitos pares?
a) $\frac{5}{32}$ b) $\frac{1}{8}$ c) $\frac{3}{16}$ d) $\frac{1}{16}$ e) $\frac{1}{32}$
- Desde un avión se suelta un proyectil (bomba) dirigida hacia un blanco (región circular de radio 40m). ¿Cuál es la probabilidad que la bomba caiga en el blanco, si éste está sobre una región circular de radio 200m?
a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{7}{12}$ e) $\frac{1}{2}$
- Un contador quiere contratar a un asistente, pero se presentan tres: Luis, Ramón y Emerson; las posibilidades de Luis son 7 contra 5 y las de Ramón de 1 a 3. ¿Cuál es la probabilidad que tiene Emerson de ocupar la vacante?
a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{7}{12}$ e) $\frac{1}{2}$
- Diez libros, de los cuales 6 son de física y 4 de química, se colocan al azar en un estante. Determine la probabilidad de que los libros de física queden juntos.
a) $\frac{1}{21}$ b) $\frac{1}{42}$ c) $\frac{4}{9}$ d) $\frac{5}{42}$ e) $\frac{21}{35}$

RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

12. Se lanza 4 monedas y dos dados. ¿Cuál es la probabilidad de obtener 3 caras en las monedas y una suma igual a 10 en los dados?
- a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{1}{6}$
 d) $\frac{1}{48}$ e) $\frac{1}{12}$
13. En una caja hay 10 bolas de billar, de las cuales 4 son rojas. Se toma tres piezas al azar. Determine la probabilidad de que por lo menos uno resulte de color rojo.
- a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{10}{39}$
 d) $\frac{7}{60}$ e) $\frac{5}{6}$
14. Considerando que la semana empieza el lunes. ¿Cuál es la probabilidad de que al escoger, Edgar, dos días al azar del mes de agosto, para salir con su esposa, estos resulten días consecutivos y de la misma semana; además el primer día de dicho mes es miércoles?
- a) $\frac{26}{31}$ b) $\frac{26}{45}$ c) $\frac{26}{31 \times 15}$
 d) $\frac{13}{31 \times 15}$ e) $\frac{26}{45 \times 3}$
15. De una baraja de naipes, se extraen al azar 3 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres cartas sean del mismo palo?
- a) $\frac{2}{17}$ b) $\frac{11}{17}$ c) $\frac{11}{25}$
 d) $\frac{2}{25}$ e) $\frac{22}{17 \times 25}$
2. Se lanza un par de dados. Si los números que resultan son diferentes. Hallar la probabilidad de que su suma sea impar.
- a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{3}{10}$ c) $\frac{7}{10}$
 d) $\frac{1}{3}$ e) $\frac{2}{8}$
3. En un Ómnibus viajan 16 Varones, 18 damas y 20 niños. ¿Cuál es la probabilidad de que el primero en bajar sea un niño?
- a) $\frac{15}{53}$ b) $\frac{18}{53}$ c) $\frac{10}{27}$
 d) $\frac{38}{53}$ e) $\frac{35}{53}$
4. Una caja contiene 12 cartas rojas, 6 blancas y 8 negras, se saca una sin mirar, ¿Cuál es la probabilidad de que la carta sea roja?
- a) $\frac{12}{20}$ b) $\frac{6}{13}$ c) $\frac{5}{7}$
 d) $\frac{9}{13}$ e) $\frac{3}{13}$
5. 9 amigos se sientan al azar en círculo. ¿Cuál es la probabilidad de que 2 de ellos queden juntos?
- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{4}$
 d) $\frac{1}{8}$ e) $\frac{1}{5}$
6. 6 parejas de casados se encuentran en una habitación, si las 4 personas se escogen al azar, encontrar la probabilidad de que se escojan 2 parejas de casados.
- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{17}$
 d) $\frac{1}{33}$ e) $\frac{2}{5}$

TAREA DOMICILIARIA

1. Se lanzan simultáneamente una moneda y un dado. Calcular la probabilidad de obtener una cara y un número par?
- a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{6}$
 d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{3}{4}$
7. Hallar la probabilidad de que al lanzar tres dados, la suma de los números que se obtengan sea igual
- a) $\frac{1}{2}$ b) 0,25 c) 0,125
 d) $\frac{3}{4}$ e) 0,7

8. En un casting se seleccionan a 5 varones y 7 mujeres; de los cuales se aceptarán a 4 de ellos. ¿Cuál es la probabilidad de que el grupo aceptado sea mixto?
- a) $\frac{1}{9}$ b) $\frac{1}{90}$ c) $\frac{1}{99}$
 d) $\frac{90}{97}$ e) $\frac{91}{99}$
9. En una fiesta donde asistieron 90 personas, resulta que 60 fuman, 40 beben y 10 no fuman ni beben; si de éstas personas se eligen una de ellas al azar. ¿Cuál es la probabilidad que beba y fume?
- a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{2}{9}$ c) $\frac{1}{15}$
 d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{2}{5}$
10. La probabilidad de que Lina estudie computación es 0,75 y la probabilidad que estudie enfermería es 0,50. Si la probabilidad de que estudie computación ó enfermería es 0,85 ¿Cuál es la probabilidad de que estudie sólo una de estas carreras?
- a) 0,21 b) 0,35 c) 0,45
 d) 0,56 e) 0,64
11. Se tiene 5 libros; 3 de R.M y 2 de R.V.; ordenados en un estante, ¿cuál es la probabilidad de que los Libros de R.V. sean separados por los 3 libros de R.M.?
- a) 0,20 b) 0,25 c) 0,30
 d) 0,50 e) 0,10
12. La probabilidad de que Bárbara estudie para el examen de Ingreso es 0,3. Si estudia la probabilidad de que ingrese es 0,7 pero si no estudia, la probabilidad es sólo 0,4. Si Bárbara ingresa. ¿Cuál es la probabilidad de que haya estudiado?
- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{3}{4}$
 d) $\frac{3}{7}$ e) $\frac{4}{7}$
13. Emerson, Luis y Robert ejecutan un penal; las posibilidades para hacer gol, son:
- $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$
 respectivamente. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de ellos haga un gol?
- 1113 2
 a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{4}$
 d) $\frac{3}{4}$ e) $\frac{2}{3}$
14. Durante todas las noches del mes de octubre; Luisita escucha música ó lee un libro. Escucha 21 noches y lee un libro 15 noches. Si se elige una de esas noches al azar y Luisita escucha música. ¿Cuál es la probabilidad de que lea un libro?
- a) $\frac{5}{31}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{2}{3}$
 d) $\frac{16}{21}$ e) $\frac{5}{21}$
15. Se escriben todas las palabras de 8 letras empleando todas las letras de la palabra MEDICINA. Señale la probabilidad de que la letra "I" aparezca al inicio y la final.
- a) $\frac{1}{28}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{4}$
 d) $\frac{3}{4}$ e) $\frac{1}{7}$

CLAVES DE RESPUESTA

1	2	3	4	5
B	A	C	B	C
6	7	8	9	10
D	C	E	B	C
11	12	13	14	15
E	D	D	E	A

Psicotécnico

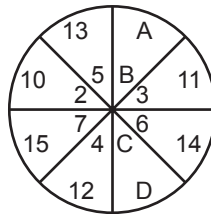
Objetivos

Al finalizar el presente capítulo, el alumno de Ceprevi estará en la capacidad de:

1. Analizar, relacionar y realizar una correcta conclusión de acuerdo a la información, gráfica o numérica que nos dan.
2. Aplicar, criterios matemáticos, físicos, químicos para desarrollar y concluir con certeza problemas relacionados a estos temas.
3. Establecer con mayor precisión las analogías entre conjuntos de figuras, así como también la diferencia entre ellos.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Hallar: $A+B+C+D$

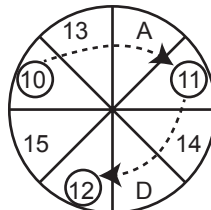


Resolución

Se observa que los números son sucesivos:

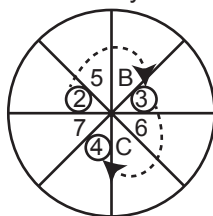
10, 11, 12, 13, 14, 15, A, D

Saltando dos sectores circulares, por lo tanto: $A = 16$; $D = 17$



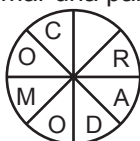
La relación entre los números es igual que el caso anterior.

$$\therefore B = 8 \text{ y } C = 9$$



De donde: $A+B+C+D = 16+8+9+17 = 50$

2. Completar el gráfico y formar una palabra.



Resolución

Con las siguientes letras se puede formar la palabra ACOMODAR.

3. El número que falta en la figura 3, es:



Resolución:

Analizando la fig. 1 y 2 se tiene:

Fig.1: $12 + 2 + 8 = 22 \Rightarrow 2 + 2 = 4$

Fig.2: $7 + 4 + 13 = 24 \Rightarrow 2 + 4 = 6$

$\therefore$ Fig.3: $15 + 6 + 6 = 27 \Rightarrow 2 + 7 = 9$

3. En la siguiente analogía numérica, calcular el número que falta.

$$\begin{array}{ccc} 6 & (9) & 3 \\ 38 & () & 4 \end{array}$$

Resolución:

En una analogía numérica, los números que están en los extremos se relacionan, mediante operaciones matemáticas simples, para obtener el número central.

RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

Primera Opción:

$$\begin{array}{ccc} 6 & (9) & 3 \\ \swarrow & & \searrow \\ 6 + 3 & = & 9 \end{array}$$

∴

$$\begin{array}{ccc} 38 & () & 4 \\ \swarrow & & \searrow \\ 38 + 4 & = & 42 \end{array}$$

Pero no hay este numeral como respuesta.

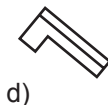
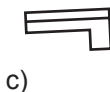
Segunda Opción:

$$\begin{array}{ccc} 6 & (9) & 3 \\ \swarrow & & \searrow \\ \frac{6 \times 3}{2} & = & 9 \end{array}$$

∴

$$\begin{array}{ccc} 38 & () & 4 \\ \swarrow & & \searrow \\ \frac{38 \times 4}{2} & = & 42 \end{array}$$

5. Señale la figura que no tiene relación con las demás:
(Todas las figuras son iguales, solo en diferente posición)

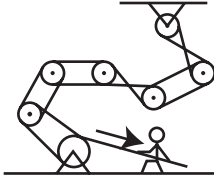


Resolución:

Realizando giros en sentido horario y antihorario la única figura que no guarda relación con las demás es la c). (Por lo que es una figura contraria a las demás).

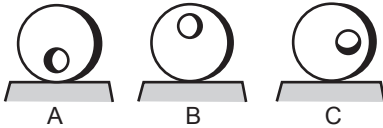
PROBLEMAS PROPUESTOS

1. El hombre al jalar la cuerda, hace, girar la primera rueda, en sentido horario, ¿Cuántas ruedas adicionales giraran en sentido horario?



- a) 4 b) 3 c) 7
d) 6 e) 5

2. ¿Cuál será la posición del disco metálico agujereado después de haber rodado?



- a) Sólo a
b) Sólo b
c) Sólo c
d) Depende de # de vueltas
e) F.I.

3. Hallar la figura que completa la serie gráfica?



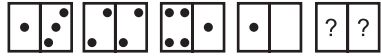
- a) b) c)
d) e)

4. ¿Qué figura debe continuar?



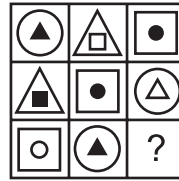
- a) b) c)
d) e)

5. ¿Qué ficha debe seguir?



- a) 4 b) 3 c) 7
d) 6 e) 5

6. ¿Qué figura debe ir en el recuadro vacío?

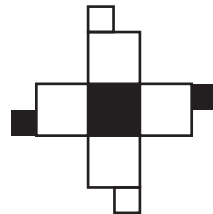


- a) b) c)
d) e)

7. Si: $\overline{UNCP} - 99 = \dots 1403$
Hallar: $U+N+C+P$

- a) 18 b) 8 c) 26
d) 20 e) 24

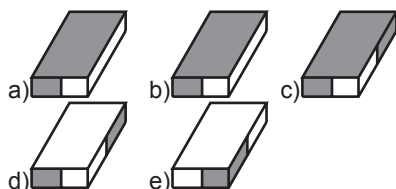
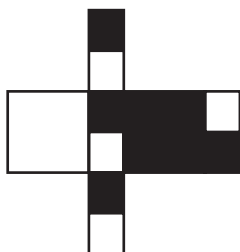
8. Al doblar la figura plana para formar un cubo, se obtiene?



- a) b) c)
d) e)

RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

9. Al doblar la figura plana para formar un paralelepípedo se obtiene?:



10. ¿Qué número falta en el arreglo siguiente?

5	6	4	12	3
---	---	---	----	---

33	34	32	?	24
----	----	----	---	----

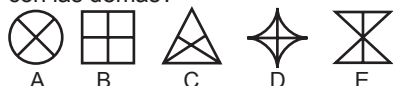
- a) 36 b) 84 c) 40
d) 144 e) 96

11. Completar adecuadamente:



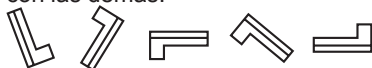
- a) b) c)
d) e)

12. Señale la figura que no tiene relación con las demás?



- a) A b) B c) C
d) D e) E

13. Señale la figura que no tiene relación con las demás.



- a) A b) B c) C d) D e) E

14. Hallar el número que falta en la siguiente analogía numérica:

$$\begin{array}{r} 132 \text{ (13) } 232 \\ 128 \text{ (7) } 284 \\ 149 \text{ () } 265 \end{array}$$

- a) 11 b) 15 c) 8 d) 9 e) 7

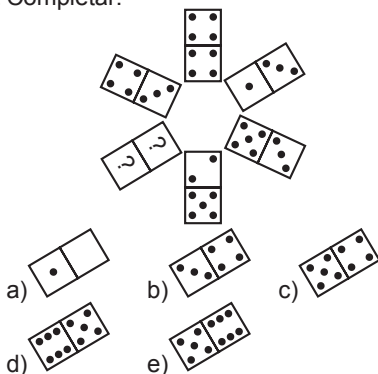
15. Completar la siguiente distribución numérica:

(Dar como resultado la suma de los números encontrados).

$$\begin{array}{r} 5 \quad 8 \quad 6 \\ 7 \quad 10 \quad 8 \\ 4 \quad ? \quad ? \end{array}$$

- a) 10 b) 12 c) 8 d) 13 e) 15

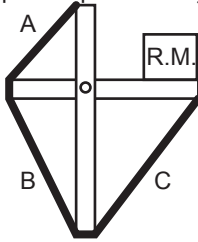
16. Completar:



17. Se presentó un niño a comprar 4 litros de y; el dueño del establecimiento que solo tenía dos vasijas sin marca alguna, una de 5 litros y otra de 3 litros se puso hacer una serie de trasiegos ante la mirada incrédula del pequeño cliente, y por fin le dijo: "Aquí tienes los 4 litros". ¿Podría explicar el proceso más corto que debió seguir el vendedor y cuánto es la mínima cantidad de leche que utilizó?

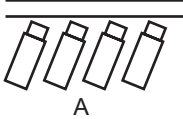
- a) 8 b) 9 c) 10 d) 12 e) 7

18. ¿Cuál de los pedazos de cadena se necesita para soportar la caja?

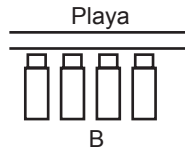


- a) A b) B c) C
d) todas e) Ninguna

19. ¿De qué manera entran mas carros en una cuadra?
Playa



- a) A
d) ninguna

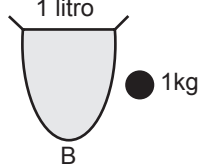


- b) B c) iguales
e) F.D.

20. ¿Cuál de los dos pesa más?

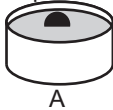


- a) A
d) C

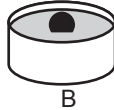


- b) B c) iguales
e) F.D.

21. ¿Cuál líquido es más denso?

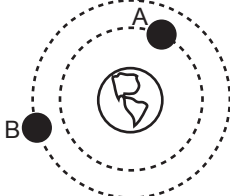


- a) A
d) ninguno



- b) B c) iguales
e) F.D.

22. ¿Cuál de las dos lunas dará más vuelta alrededor del planeta?



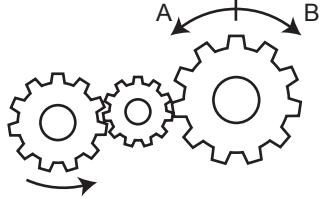
- a) A b) B c) iguales
d) ninguno e) F.D.

23. ¿Cuál de las 2 figuras muestra como se parará este círculo de madera?



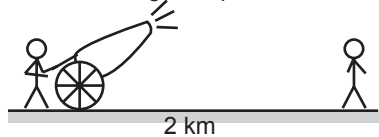
- a) B b) A c) C
d) cualquiera e) F.D.

24. Cuando el piñón izquierdo gira en la dirección indicada, en que dirección girará el de la mano derecha?



- a) C b) A c) B
d) cualquiera e) F.D.

25. En el instante que la persona disparó el cañón, la segunda persona:



- a) oirá el disparo
b) vera el humo
c) a y b
d) ninguna
e) F.D.

CLAVES DE RESPUESTA

1 2 3 4 5

6 7 8 9 10

11 12 13 14 15